Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. НИКОЛЬСКИЙ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ ЛЮБЫМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IV 1947)

Пусть

$$\psi_0(x), \quad \psi_1(x), \ \ldots, \ \psi_n(x) \tag{1}$$

функции, принадлежащие к пространству (L) суммируемых на $[a, b]$ функций.

Назовем наилучшим приближением функции $f(x) \in L$ в среднем (при помощи полиномов, составленных из функций (1)) минимум

$$E_n(f)_L = \min_{\lambda_k} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(x) \right| dx,$$

распространенный на всевозможные числа λ_k.

Пусть, далее, $K(t, x)$ $(a \leqslant t, x \leqslant b)$ ядро, непрерывное при всяком x относительно t и удовлетворяющее условиям

$$|K(t, x)| \leqslant M(x), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \qquad M(x) \in (L), \tag{2}$$

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b |K(t, x) - K(t_0, x)|\, dx = 0, \qquad a \leqslant t, \qquad t_0 \leqslant b. \tag{3}$$

Рассмотрим класс HV функций f, определяемых равенством

$$f(x) = \int_a^b K(t, x)\, d\varphi(t), \tag{4}$$

где φ — функция с ограниченной вариацией, удовлетворяющая неравенству

$$\|\varphi\|_v = \operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} \varphi(t) \leqslant 1. \tag{5}$$

Обозначим через

$$\mathscr{E}(HV)_L = \sup_{f \in HV} E_n(f)_L$$

верхнюю грань наилучших приближений, распространенную на класс HV. Справедлива

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{E}(HV)_L = \max_{a \leqslant t \leqslant b} E_n(K(t, x))_L, \tag{6}$$

$K(t, x)$ под знаком E_n рассматривается как функция x.

Введем в рассмотрение функцию

$$P_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t)\, \psi_k(x), \tag{7}$$

где $\alpha_k(t)$ некоторые непрерывные на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$ коэффициенты. Тогда выражение

$$U_n(f, x) = \int_a^b P_n(t, x)\, d\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \psi_k(x), \tag{8}$$

$$a_k = \int_a^b \alpha_k(t)\, d\varphi(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

будет представлять собой полином от $\psi_k(x)$, линейно зависящий от φ; мы будем рассматривать его как приближение f (при помощи полиномов, составленных из ψ_k).

Выражение $U_n(f, x)$ естественно назвать наилучшим (в среднем) методом приближения для класса HV при таких $\alpha_k(t)$, при которых верхняя грань

$$\sup_{f \in HV} \int_a^b |f(x) - U_n(f, x)|\, dx$$

является наименьшей среди возможных (при варьировании функциями $\alpha_k(t)$).

Очевидно, $U_n(f, x)$ будет наилучшим методом, если выполняется равенство

$$\sup_{f \in HV} \int_a^b |f(x) - U_n(f, x)|\, dx = \mathscr{E}(HV)_L. \tag{9}$$

Следующая теорема утверждает существование метода $U_n(f, x)$, для которого выполняется это равенство, и дает для этого необходимые и достаточные условия, налагаемые на $P_n(t, x)$.

Предварительно обозначим через t_* то значение t из сегмента $[a, b]$, для которого достигается максимум (6) (существующий вследствие (3)).

Теорема 2. *Для того чтобы имело место равенство* (9), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_a^b |K(t, x) - P_n(t, x)|\, dx \leqslant E_n(K(t_*, x))_L \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{10}$$

Это условие, очевидно, фактически выполняется, если для каждого значения t из сегмента $[a, b]$ взять в качестве $P_n(t, x)$ полином вида $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(x)$, наилучшим образом приближающий в среднем (относительно x) функцию $K(t, x)$, т. е. для которого

$$E_n(K(t, x))_L = \int_a^b |K(t, x) - P_n(t, x)|\, dx.$$

Пусть $P_n(t, x)$ — какая угодно функция вида (7) с непрерывными коэффициентами $\alpha_k(t)$ и $U_n(f, x)$ — ей соответствующий метод приближения вида (8). Тогда, обозначив через $g(x)$ произвольную функцию, измеримую на $[a, b]$ и не превышающую по абсолютной величине единицу, будем для любой функции $f \in HV$ иметь

$$\sup_{f \in HV} \int_a^b |f(x) - U_n(f, x)|\, dx = \sup_{\varphi} \int_a^b \left| \int_a^b [K(t, x) - P_n(t, x)]\, d\varphi(t) \right| dx =$$

$$= \sup_{\varphi} \sup_{g} \int_a^b g(x) \int_a^b [K(t, x) - P_n(t, x)]\, d\varphi(t)\, dx =$$

$$= \sup_{g} \sup_{\varphi} \int_a^b \left(\int_a^b [K(t, x) - P_n(t, x)]\, g(x)\, dx \right) d\varphi(t) =$$

$$= \sup_{g} \max_{t} \left| \int_a^b [K(t, x) - P_n(t, x)]\, g(x)\, dx \right| = \max_{t} \sup_{g} =$$

$$= \max \int_a^b |K(t, x) - P_n(t, x)|\, dx \geqslant E_n(K(t_*, x))_L,$$

где

$$E_n(K(t_*, x))_L = \max_{t} E_n(K(t, x))_L$$

(законность замены порядка интегрирования обеспечивается условиями (2) и (3)).

При этом равенство в последнем звене этих соотношений будет, очевидно, иметь место тогда и только тогда, если функции $\alpha_k(t)$ выбраны так, что $P_n(t, x)$ удовлетворяет неравенству (10) для любого t. Как уже было сказано в формулировке теоремы 2, неравенство (10) фактически будет иметь место, если, например, $P_n(t, x)$ при любом фиксированном t есть наилучший полином для $K(t, x)$.

Из наших рассуждений, в частности, следует, что если $f \in HV$, то

$$E_n(f)_L \leqslant E_n(K(t_*, x))_L. \tag{11}$$

С другой стороны, положим

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} 0 & t < t_* \quad (t = t_*, \quad \text{если} \quad t_* = a), \\ 1 & t \geqslant t_* \quad (t > t_*, \quad \text{если} \quad t_* = a), \end{cases}$$

$$f_*(x) = \int_a^b K(t, x)\, d\varphi_*(t) = K(t_*, x). \tag{12}$$

Очевидно, $f_* \in HV$, и для $f = f_*$ неравенство обращается в равенство. Этим теоремы 1 и 2 доказаны.

П р и м е ч а н и е 1. Класс HV содержит в себе класс HL функций вида (4), где $\varphi(t)$ — абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условию (5). Теоремы 1 и 2 сохраняют силу, если в их формулировках значок V заменить на L. Доказательство остается тем же до неравенства (11) включительно. Далее вводим в рассмотрение последовательность абсолютно непрерывных функций $\varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\operatorname{var} \varphi_\nu = 1$, $\varphi_\nu(t) \to \varphi_\nu(t)$ при $\nu \to \infty$ для всех t, и доказываем, что соответствующая последовательность функций

$$f_\nu(x) = \int_a^b K(t, x)\, d\varphi_\nu(t) \qquad (f_\nu \in HL)$$

стремится в смысле (L) к $f_*(x)$ (см. (12)), что влечет

$$E_n(f_\nu)_L \to E_n(f_*)_L \qquad (\nu \to \infty).$$

Примечание 2. Доказанные теоремы 1 и 2 при известных условиях остаются в силе в случае разрывных по t ядер $K(t, x)$, и тогда интеграл (4) надо понимать в смысле Стильтьеса-Лебега. Например, достаточно считать, что $K(t, x)$ есть измеримое B в прямоугольнике $a \leqslant t$, $x \leqslant b$ ядро, удовлетворяющее условиям (2) и (3).

Примечание 3. Пусть, в частности, $a=0$, $b=2\pi$ и $K(t, x)=K(t-x)$, где $K(t)$ измеримая B ограниченная периода 2π функция и $E_n(f)_L$ — наилучшее приближение в среднем на интервале длины 2π функции f тригонометрическим полиномом порядка $n-1$. Тогда из теорем 1 и 2 будет следовать

$$\mathscr{E}_n(HV)_L=E_n(K(x))_L,$$

и, если $T_{n-1}(x)$ есть тот или иной наилучший в среднем полином порядка $n-1$, то выражение

$$U_n(f, x)=\int_0^{2\pi} T_n(t-x)\, d\varphi(t)$$

будет наилучшим линейным методом для класса HV (единственным, если $K(x)$ непрерывная функция).

В моей работе ([1] § 6) изучался, наряду с классом HV, класс HM периодических функций вида

$$f(x)=\int_0^{2\pi} K(t-x)\, g(t)\, dt, \qquad |g(x)| \leqslant 1,$$

для которых рассматривалось равномерное приближение $E_n(f)$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$. Там же было введено специальное свойство ядра $K(t)$, которое называлось свойством (A_n^*).

Из результатов § 6 работы [1] и сказанного выше непосредственно следует утверждение:

Имеет место неравенство:

$$\sup_{f \in HM} E_n(f) \leqslant \sup_{f \in HV} E_n(f)_L = \sup_{f \in HL} E_n(f)_L. \tag{13}$$

Если при этом разность $K(t)-T_{n-1}(t)$, где $T_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$, равна нулю на множестве меры нуль, то для того, чтобы неравенство (13) обращалось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ удовлетворяло условию (A_n^*).

Поступило
9 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 207 (1946).