Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ШАПИРО

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 11 X 1946)

Постановка задачи о преобразовании выражений для функций напряжений, данных Б. Г. Галеркиным ([1]), к произвольной системе криволинейных координат принадлежит И. Я. Штаерману ([2]).

Ниже приводится полное решение указанной задачи и попутно аналогичное решение для функций Нейбера-Папковича ([3,4]).

§ 1. Выражения для смещений. Бигармоническая вектор-функция Галеркина $\vec{\Phi}$ (в американской литературе ([5,6]) эту функцию называют «вектором Галеркина») связана с вектором смещения $\vec{u}$ зависимостью

$$2G\vec{u}=2(1-\sigma)\nabla^2\vec{\Phi}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Phi}. \tag{1,1}$$

Вводя гармоническую вектор-функцию $\vec{F}=\nabla^2\vec{\Phi}$ и обозначая $\Psi=\operatorname{div}\vec{\Phi}$, вместо (1) получаем решение Галеркина в виде

$$2G\vec{u}=2(1-\sigma)\vec{F}-\operatorname{grad}\Psi. \tag{1,2}$$

Аналогичный вид имеет вектор смещения и в решении Нейбера-Папковича

$$2G\vec{u}=4(1-\sigma)\vec{F}_1-\operatorname{grad}\Psi, \tag{1,3}$$

где $\vec{F}_1$—гармоническая вектор-функция, $\Psi=\vec{F}_1\vec{R}+\Phi_0$ ($\vec{R}$— радиус-вектор точки, Φ_0— гармоническая скалярная функция). Таким образом, для перехода от решения Галеркина к решению Нейбера-Папковича в (1,2) следует положить $\vec{F}=2\vec{F}_1$ и $\Psi=\vec{\Phi}\vec{R}+\Phi_0$.

Как известно ([3]), общее решение задачи теории упругости выражается через три гармонические скалярные функции. Поэтому три из шести гармонических скалярных функций, входящих в решение (1,1), и одну из четырех гармонических скалярных функций, входящих в решение (1,3), можно считать равным нулю.

Обозначим через u_i и F_i ковариантные составляющие векторов $\vec{u}$ и $\vec{F}$. Тогда решение Галеркина (1,2) в ковариантных составляющих имеет вид

$$2Gu_i=2(1-\sigma)F_i-\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}. \tag{1,4}$$

Переходя к физическим составляющим u_{q_i} и F_{q_i}, для случая ортогональных координат q_1, q_2, q_3 имеем

$$2\,Gu_{q_i}=2\,Gu_i\,\frac{1}{H_i}=2\,(1-\sigma)\,F_{q_i}-\frac{1}{H_i}\,\frac{\Psi}{\partial q_i}\,, \tag{1,5}$$

где H_i— коэффициенты Ляме,

$$H_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

и

$$F_{q_i}=\frac{1}{H_i}\left(F_x\,\frac{\partial x}{\partial q_i}+F_y\,\frac{\partial y}{\partial q_i}+F_z\,\frac{\partial z}{\partial q_i}\right). \tag{1,6}$$

Аналогичные выражения можно написать для решения Папковича-Нейбера:

$$2\,Gu_i=4\,(1-\sigma)\,F_{1i}-\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,. \tag{1,7}$$

В физических составляющих решение (1,7) дано Нейбером ([3]).

§ 2. В ы р а ж е н и я д л я н а п р я ж е н и й. Пользуясь соотношением между тензорами напряжений Π и деформаций χ

$$\Pi=\frac{2\,\sigma}{1-2\,\sigma}\,G\theta I+2\,G\chi, \tag{2,1}$$

где θ — объемная деформация, I — единичный тензор, можем написать зависимость между ковариантными составляющими p_{ik} тензора напряжений и e_{ik}— тензора деформаций:

$$p_{ik}=\frac{2\,\sigma}{1-2\,\sigma}\,g_{ik}\theta+2\,Ge_{ik}. \tag{2,2}$$

Здесь g_{ik}— ковариантная составляющая фундаментального тензора. Для составляющей тензора деформаций имеем

$$e_{ik}=\frac{1}{2}(\nabla_k u_i+\nabla_i u_k)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^i}-2u_\lambda\,\Gamma_{ik}{}^{\lambda}\right), \tag{2,3}$$

причем Γ^λ_{ik}— символ Кристоффеля второго рода.

Подставляя (1,4) в (2,3) и пользуясь (2,2), находим

$$p_{ik}=g_{ik}\sigma\nabla^2\Psi+(1-\sigma)\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^k}+\frac{\partial F_k}{\partial x^i}\right)-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^i\partial x^k}-\left[2\,(1-\sigma)\,F_\lambda-\frac{\partial\Psi}{\partial x^\lambda}\right]\Gamma^\lambda_{ik}. \tag{2,4}$$

Переходя к физическим составляющим τ_{ik} тензора напряжений, имеем

$$\tau_{ik}=\frac{p_{ik}}{H_iH_k}=\delta^i{}_k\sigma\nabla^2\Psi+\frac{1}{H_iH_k}\Big\{(1-\sigma)\,\frac{\partial F_{q_i}}{\partial q_k}\,H_i+\frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_i}H_k+$$
$$+F_{q_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_i}\Big\}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_i\partial q_k}-\left[2\,(1-\sigma)\,F_{q_\lambda}H_\lambda-\frac{\partial\Psi}{\partial q_\lambda}\right]\Gamma^\lambda_{ik}. \tag{2,5}$$

Здесь

$$\Gamma^\lambda_{ik}=0 \text{ при } i\neq k\neq\lambda;$$

$$\Gamma^\lambda_{i\lambda}=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial H_\lambda}{\partial q_i}\,;$$

$$\Gamma^{\lambda}_{kk} = -\frac{H_k}{H}\frac{\partial H_k}{\partial H_\lambda};$$

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Полагая в (2,5) $F_{q_i} = 2F_{1q_i}$, приходим к решению, данному в иной форме Нейбером ([3]).

Заметим, что в случае деформации, симметричной относительно оси, векторы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ можно считать направленными вдоль оси симметрии.

Выражения для функций напряжений в цилиндрических и сферических координатах приводятся Галеркиным ([7,8]) и Нейбером ([3]) и в эллипсоидальных — Нейбером ([3]). Эти выражения получаются как частный случай формул, приведенных выше.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
11 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Г. Галеркин, ДАН, А. 14, 353 (1930). [2] И. Я Штаерман, Журн. Математич. ин-та, № 3—4, 35 (1936). [3] H. Neuber, Kerbspannungslehre, 1937. [4] П. Ф. Папкович, Теория упругости, 1939. [5] H. Westergaard, Bull. Am. Math. Soc., **41**, No. 10, 695 (1935). [6] R. Mindlin, Bull Am. Math. Soc., **42**, No. 6, 373 (1936). [7] Б. Г. Галеркин, ДАН, А. 10, 281 (1931). [8] Б. Г. Галеркин, Прикл. математ. и мех., **6**, № 6, 487 (1942).