Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЩЕЛЕЙ

(Представлено академиком В. А. Фоком 27 IX 1946)

Закон распределения напряжения вдоль узкой излучающей щели*, прорезанной в поверхности эндовибратора (или волновода), возбуждаемого изнутри некоторыми источниками (диполями, витками и т. п.), определяется интегро-дифференциальным уравнением**:

$$\frac{d^2V}{d\tau^2}+k^2V=\alpha\left\{G[V,\tau]+\frac{i\omega}{c}\pi\mu H^0_\tau(\tau)\right\} \tag{1}$$

с граничными условиями***

$$V=0 \text{ при } \tau=0 \text{ и } \tau=l. \tag{2}$$

Здесь V — напряжение между краями щели, τ — длина дуги, отсчитываемая вдоль щели от одного из ее концов, l — длина щели, $\alpha\equiv\frac{1}{2\ln(kd/4)}$ — малый параметр, d — ширина щели, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, ω — угловая частота, $c=3\cdot10^{10}$ см/сек., $G[V,\tau]$ — линейный относительно V оператор, зависящий от формы щели и эндовибратора (но не от источников), $\vec{H}^0$ — магнитный вектор поля, создаваемого внутри эндовибратора теми же источниками при отсутствии щели, а $H^0_\tau(\tau)$ — составляющая этого вектора, параллельная щели, в точке τ щели****.

В такой форме уравнение (1) справедливо для любых узких щелей ($d\ll l,\lambda$), прорезанных в произвольных замкнутых металлических

* Узкая щель может интенсивно излучать в том случае, когда она пересекает линии тока, текущие по внутренней поверхности замкнутого эндовибратора, под углами, близкими к 90°. Только такие щели представляют интерес для целей излучения или приема и к ним относятся излагаемые здесь результаты.

** Это уравнение в основном совпадает с уравнением (14), данным нами в работе ([1]). Отличие заключается только в том, что здесь магнитная проницаемость $\mu\neq1$ и использовано равенство

$$H^0_\tau(\tau)=-\frac{4\pi}{c\rho_0}\int\limits_{(h)}\vec{I}\vec{E}^1 d\vec{h},$$

немедленно следующее из леммы Лоренца, примененной к полям $\vec{E}^1$, $\vec{H}^1$ (см. ([1])) и $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$ (см. текст).

*** Если щель замкнутая, то условия (2) должны быть заменены требованием периодичности.

**** Или, точнее, в точке τ на внутренней поверхности эндовибратора, где будет прорезана щель, так как при расчете H^0 щель предполагается отсутствующей.

поверхностях*. Необходимо только, чтобы радиусы кривизны линий, совпадающих с краями щели, были велики по сравнению с ее шириной. При выполнении этих условий вывод уравнения (1) в общем случае мало отличается от данного в работе ([1]).

Уравнение (1) совпадает по своей внешней форме с аналогичным уравнением для распределения тока в тонких проводах ([2]), последнее же является обобщением известного «телеграфного уравнения» для тока, которым радиотехника так успешно пользуется более полувека. Представляет поэтому интерес, особенно для инженерной практики, получить уравнение распределения напряжения вдоль щели, аналогичное «телеграфному». Для этого поступим следующим образом.

Ищем решение уравнения (1) в виде суммы

$$V = V_1 + U, \tag{3}$$

где V_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2V_1}{d\tau^2} + p^2 V_1 = \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_\tau^e(\tau), \quad p^2 = k^2 - i\alpha\beta, \tag{4}$$

с граничными условиями $V_1 = 0$ при $\tau = 0, \, l$.

Входящий сюда параметр β мы определим ниже. Вычитая из уравнения (1) равенство (4), получим

$$\frac{d^2U}{d\tau^2} + k^2 U = \alpha \{ G[V, \tau] - i\beta V_1 \}; \quad U = 0 \text{ при } \tau = 0, \, l. \tag{5}$$

Отсюда следует

$$U = -\frac{\alpha}{k} \frac{\sin k\tau}{\sin kl} \int_0^l \{ G[V, x] - i\beta V_1 \} \sin k(l - x)\, dx +$$

$$+ \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{ G[V, x] - i\beta V_1 \} \sin k(\tau - x)\, dx.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений, положив сначала в правой части $U = 0$, т. е. $V = V_1$. Для того, чтобы полученное при этом решение имело смысл для любых значений kl (включая $kl = n\pi$), необходимо выполнение равенства

$$\int_0^l \{ G[V_1, x] - i\beta V_1 \} \sin k(l - x)\, dx = 0, \tag{6}$$

которое и определяет, в рассматриваемом приближении, введенный выше параметр β. Таким образом, в первом приближении

$$U = \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{ G[V_1, x] - i\beta V_1 \} \sin k(\tau - x)\, dx.$$

Продолжая этот процесс далее, можно получить для U и β следующие приближения в виде степенных рядов по малому параметру α.

Из последних формул следует, что

$$U = V_1 O(\alpha), \quad V = V_1 (1 + O(\alpha)).$$

---

* Когда ω не совпадает с одной из собственных частот замкнутого эндовибратора.

Для узких щелей, когда $\alpha \ll 1$, $V \approx V_1$, и искомое «телеграфное» уравнение для V совпадает с уравнением (4):

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} + p^2 V = \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_\tau^\circ(\tau). \qquad (7)$$

Решение этого уравнения при нулевых граничных условиях имеет вид:

$$V = A \sin p\tau + \frac{\alpha}{p} \int_0^\tau F(x) \sin p(\tau - x)\, dx. \qquad (8)$$

Здесь

$$A = -\frac{\alpha}{p \sin pl} \int_0^l F(x) \sin p(l-x)\, dx, \quad F(\tau) \equiv \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_\tau^\circ(\tau). \qquad (8')$$

Легко сообразить, что величина $p \cong k - i\alpha \frac{\beta}{2k}$ (или, точнее, ip) представляет собой постоянную распространения, а $\frac{\alpha \operatorname{Re} \beta}{2k}$ — «затухание» щели. Так как для узких щелей величина $\alpha\beta/2k$ весьма мала, то в формуле (8) можно положить $p = k$. Что касается постоянной A, то при ее расчете из (8') можно полагать $k = p$ только при достаточно «расстроенной» щели — $|\sin kl| \gg \left|\frac{\alpha\beta}{2k} l\right|$, в противном случае необходимо сохранить p (большей частью только в $\sin pl$, стоящем в знаменателе (8')). Для «настроенной» щели ($l \cong \lambda/2$) выражение (8) превращается в синусоиду

$$V = A \sin k\tau + O(\alpha), \quad A = \frac{2i}{\operatorname{Re} \beta l} \int_0^l F(x) \sin k(l-x)\, dx. \qquad (9)$$

Равенство (7) и его решение (8) показывают, что в рассматриваемом приближении распределение напряжения вдоль щели совпадает с распределением тока вдоль эквивалентной металлической приемной антенны, если отождествить H_τ^0 с составляющей электрического вектора невозмущенной падающей волны. Величина H_τ^0, являющаяся составляющей магнитного вектора поля эндовибратора (или волновода), невозмущенного щелью, для большинства практических случаев известна из соответствующей литературы. Оператор G, нахождение которого связано с расчетом полей ([1]), нужен только для расчета величины β (6), характеризующей «затухание щели» *.

С другой стороны, в силу сказанного ранее, знание β необходимо только для настроенных (или слабо расстроенных) щелей, где оно определяет масштаб кривой V (9). Таким образом, построенная теория в смысле простоты ничем не уступает теории обычных проволочных антенн. Основное уравнение (7) получено для узких щелей ($\alpha \ll 1$), но можно ожидать, что оно останется применимым для инженерных расчетов и в случае, когда неравенство $\alpha \ll 1$ не выполняется, как это имеет место в теории проволочных антенн. Если среда, заполняющая внутренность эндовибратора или волновода, имеет ε, отличное от наружной среды, то необходимо во всех формулах заменить k на $k_{экв}$:

$$k_{экв}{}^2 = \frac{k^2 + k'^2}{2},$$

* Впрочем, затухание может быть также найдено из энергетических соображений.

где $k = 2\pi / \lambda$ и $k' = 2\pi / \lambda'$, соответственно, волновые числа для наружной и внутренней сред. Отсюда, например, следует, что, заполняя эндовибратор (или волновод) диэлектриком, можно значительно сократить длину «полуволновой» щели, прорезанной в нем.

Пример 1. Рассмотрим прямоугольный волновод со сторонами a и b и волной типа H_{10}. Если прорезать в стороне a узкую щель длины a, перпендикулярно оси волновода, то [3]

$$H_\tau^0 = ik\frac{\pi}{a}\, e^{-i\gamma z} \sin\left(\frac{\pi}{a}\tau\right), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant a.$$

Подставляя это в формулы (8) и (8'), легко найдем закон распределения напряжения вдоль щели ($\mu = 1$):

$$V = \frac{e^{-i\gamma z}}{a} \frac{a\pi^2 k^2}{(\pi / a)^2 - p^2} \sin\frac{\pi}{a}\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant a.$$

Совпадение законов изменения V и H_τ^0 по τ, вообще говоря, случайно.

Пример 2. Прорежем узкую щель (длины l) вдоль части параллели сферического эндовибратора, в котором возбуждается электрическая волна с осевой симметрией. Так как магнитные линии образуют при этом систему концентрических кругов с центрами на главной оси, то $H_\tau^0 = \mathrm{const}$ на щели. Считая эту константу равной единице, найдем при помощи (8) закон распределения напряжения вдоль щели:

$$V = \frac{i\pi a}{k}\left\{1 - \sec\left(\frac{pl}{2}\right) \cos k\left(\tau - \frac{l}{2}\right)\right\}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant l.$$

Поступило
27 IX 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Н. Фельд, ДАН, 53, 7 (1946). [2] М. А. Леонтович и М. Л. Левин, ЖТФ, 14, 9 (1944). [3] Б. В. Введенский и А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, 1946, стр. 52.