Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА*

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 VI 1946)

1. В этой заметке придется иметь дело с решениями волнового уравнения

$$\square_a u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \tag{1}$$

имеющими вид:

$$u = e^{in\theta + i\lambda z} \int\limits_{\frac{at-\rho-1}{a}}^{\frac{at+\rho-1}{a}} \frac{a}{n\rho} T_n'\left[\frac{1-a(t-\tau)}{\rho}\right] \operatorname{sh}\lambda\sqrt{\rho^2-[1-a(t-\tau)]^2}\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

в случае области $\rho \leqslant 1$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $t \geqslant 0$;

$$u = e^{in\theta+i\lambda z} \int\limits_{0}^{\frac{at-\rho+1}{a}} \frac{a}{n\rho} T_n'\left[\frac{1+a(t-\tau)}{\rho}\right] \sin\lambda\sqrt{[1+a(t-\tau)]^2-\rho^2}\,\varphi(\tau)d\tau \tag{3}$$

в случае области $\rho \geqslant 1$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $t \geqslant 0$, причем

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \quad \lambda \neq 0, \quad T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Эти решения удовлетворяют нулевым начальным условиям, если

$$\varphi(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad \tau < 0. \tag{A}$$

Интегралы (2) и (3) будем коротко записывать в виде

$$\int N_n(t-\tau, \rho, a)\,\varphi\,d\tau, \tag{4}$$

указывая в необходимых случаях индексом i и e при N_n ($N_{n,i}$, $N_{n,e}$) на то, что идет речь о внутренней или внешней задаче.

Отметим, что

$$N_n(0,\ 1,\ a) = 0. \tag{5}$$

* См. ([2]).

Дифференцируя (4) по ρ, придем к выражениям вида

$$\int \frac{\partial N_n(t-\tau, \rho, a)}{\partial \rho} \varphi(\tau)\, d\tau = \int \frac{M_n(t-\tau, \rho, a)}{\sqrt{\pm\left\{\rho^2 - [1 \mp a(t-\tau)]^2\right\}}} \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где верхние знаки — для $\rho \leqslant 1$ и нижние — для $\rho \geqslant 1$, причем

$$M_n(0,\ 1,\ a) \neq 0. \tag{7}$$

2. Будем решать уравнения теории упругости для областей $\rho \leqslant 1$ или $\rho \geqslant 1$ при нулевых начальных условиях и заданных на границе $\rho = 1$ смещениях вида

$$\vec{u} = e^{in\theta + i\lambda z} \vec{u}_1(t) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots,\ \lambda \neq 0). \tag{8}$$

Скалярный и цилиндрические составляющие векторного потенциала будем искать в форме

$$\Phi(\rho, t)\, e^{in\theta + i\lambda z}, \quad [R(\rho, t), \vartheta(\rho, t), Z(\rho, t)]\, e^{in\theta + i\lambda z},$$

причем $\Phi(\rho, t)$ имеет вид (4), а $Z(\rho, t)$ получается из (4) заменой a на b и $\varphi(t)$ — на $\psi_z(\tau)$.

Так как составляющая векторного потенциала по оси OX

$$(R\cos\theta - \vartheta \sin\theta)\, e^{in\theta + i\lambda z} = \frac{e^{i\lambda z}}{2}\left[e^{i(n+1)\theta}(R + i\vartheta) + e^{i(n-1)\theta}(R - i\vartheta)\right]$$

удовлетворяет волновому уравнению $\square_b u = 0$ и нулевым начальным условиям, то полагаем

$$\frac{R + i\vartheta}{2} = \int N_{n+1}(t-\tau, \rho, b)\, \psi_1(\tau)\, d\tau, \quad \frac{R - i\vartheta}{2} \int N_{n-1}(t-\tau, \rho, b)\, \psi_2(\tau)\, d\tau,$$

откуда следует

$$R = \int N_{n+1}\psi_1\, d\tau + \int N_{n-1}\psi_2\, d\tau;$$
$$\vartheta = -i\left[\int N_{n+1}\psi_1\, d\tau - \int N_{n-1}\psi_2\, d\tau\right]. \tag{9}$$

Составляющие вектора смещения связаны с потенциалами так:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{in\, Z}{\rho} - i\lambda\vartheta, \\ v &= \frac{in\Phi}{\rho} + i\lambda R - \frac{\partial Z}{\partial\rho}, \\ w &= i\lambda\Phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho\vartheta}{\partial\rho} - inR\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Внося в (10) выражения для Φ, Z, R, ϑ и полагая $\rho = 1$, получим систему трех интегральных уравнений относительно четырех неизвестных функций $\varphi, \psi_z, \psi_1, \psi_2$. Положим $\psi_2 = 0$ и обозначим ψ_1 через ψ.

3. В случае внутренней задачи мы получим

$$u(t,\ 1) = \int\limits_{t-\frac{2}{a}}^{t} \frac{M_{n,\,i}(t-\tau, 1, a)}{\sqrt{(t-\tau)\left(\frac{2}{a} - t + \tau\right)}} \varphi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ in \int\limits_{t-\frac{2}{b}}^{t} N_{n,\,i}(t-\tau, 1, b)\, \psi_z(\tau)\, d\tau - \lambda \int\limits_{t-\frac{2}{b}}^{t} N_{n+1,\,i}(t-\tau, 1, b)\, \psi(\tau)\, d\tau,$$

$$v(t,\,1)=in\int\limits_{t-\frac{2}{a}}^{t}N_{n,\,i}\,\varphi\,d\tau+\int\limits_{t-\frac{2}{b}}^{t}\frac{M_{n,i}}{\sqrt{(t-\tau)\left(\frac{2}{b}-t+\tau\right)}}\,\psi_z\,d\tau+$$

$$+\,i\lambda\int\limits_{t-\frac{2}{b}}^{t}N_{n+1,t}\,\psi\,d\tau, \tag{11}$$

$$w(t,\,1)=i\lambda\int\limits_{t-\frac{2}{a}}^{t}N_{n,\,i}\,\varphi\,d\tau-$$

$$-\,i\int\limits_{t-\frac{2}{b}}^{t}\left[\frac{M_{n+1,\,i}}{\sqrt{(t-\tau)\left(\frac{2}{b}-t+\tau\right)}}+(n+1)\,N_{n+1,\,i}\right]\psi\,d\tau.$$

Вследствие условия (А) для промежутка $0\leqslant t<\frac{2}{a}$ система (11) превращается в систему интегральных уравнений Вольтерра, легко сводящуюся к регулярной ([1]) в силу (5) и (7). Решив ее, найдем φ, ψ_z, ψ в промежутке $0\leqslant\tau<\frac{2}{a}$. Зная эти функции в промежутке $0\leqslant\tau<k\frac{2}{a}$ (k — целое число), определим их в промежутке $k\frac{2}{a}\leqslant\tau<(k+1)\frac{2}{a}$ из системы интегральных уравнений, получающейся из (11), если в ней положить $t=t_1+k\frac{2}{a}$, $\tau=\tau_1+k\frac{2}{a}$ и разбить промежутки интегрирования $\left[t-\frac{2}{a}\,t\right]$ на два: $\left[t-\frac{2}{a},\frac{2k}{a}\right]$, $\left[\frac{2k}{a},t\right]$ и $\left[t-\frac{2}{b},t\right]$ на два: $\left[t-\frac{2}{b},\frac{2k}{a}\right]$, $\left[\frac{2k}{a},t\right]$. Так, шаг за шагом, определяются функции φ, ψ_z, ψ для любого τ, чем доказано существование и единственность решения системы (11) при условии непрерывности производных $u(t,\,1)$, $v(t,\,1)$, $w(t,\,1)$ и $u(0,\,1)=u'(0,\,1)=v(0,\,1)=v'(0,\,1)=w(0,\,1)=w'(0,\,1)$.

В случае внешней задачи вместо системы (11) получается система интегральных уравнений Вольтерра (нижний предел интегралов 0), легко сводящаяся к регулярной в силу условий (5) и (7) и имеющая единственное непрерывное решение в промежутке задания и непрерывности производных $u(t,1)$, $v(t,1)$, $w(t,1)$ и $u(0,1)=u'(0,1)=v(0,t)=v'(0,t)=w(0,t)=w'(0,t)=0$.

4. Применение одностороннего преобразования Лапласа для решения системы (11) и аналогичной для $\rho\geqslant 1$ позволяет дать формулы для определения φ, ψ_z, ψ для любого момента времени, не прибегая в случае внутренней задачи к последовательному определению их в промежутках $\left[0,\frac{2}{a}\right)$, $\left[\frac{2}{a},\frac{4}{a}\right)$, $\left[\frac{4}{a},\frac{6}{a}\right)$, ...

Применяя преобразование Лапласа к системе (11) и системе, из которой (11) была получена подстановкой $\rho=1$, и исключая $L_1\varphi$, $L_1\psi_z$, $L_1\psi$, найдем $L_1u(t,\rho)$, $L_1v(t,\rho)$, $L_1w(t,\rho)$. Таким путем получаем

$$\vec{u}(t,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}A(s,\rho)\,A^{-1}(s,1)\,L_1\vec{u}(t,1)\,ds, \tag{12}$$

где матрица

$$A(s,\rho)=\left\|\begin{matrix}\tilde{a}\,I_n'(\rho\tilde{a}) & \frac{in}{\rho}I_n(\rho\tilde{b}) & -\lambda I_{n+1}(\rho\tilde{b})\\ \frac{in}{\rho}I_n(\rho\tilde{a}) & -\tilde{b}I_n'(\rho\tilde{b}) & i\lambda I_{n+1}(\rho\tilde{b})\\ i\lambda I_n(\rho\tilde{a}) & 0 & -i\tilde{b}\,I_n(\rho\tilde{b})\end{matrix}\right\|, \tag{13}$$

$I_n(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

В случае внешней задачи решение также получается в форме (12), только в матрице A функции $I_n(x)$ надо заменить функциями Макдональда $K_n(x)$.

5. В случае задания напряжения на границе векторный и скалярный потенциалы ищем по формулам, получающимся из (4) и (9) интегрированием по t от 0 до t, т. е. имеющим вид

$$\int_0^t\left\{\int N_n(t-\xi,\rho,a)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right\}d\tau,$$

что вызвано тем, что в граничные условия входят вторые производные от потенциалов. Повторяя рассуждения, проведенные для задачи о смещениях, убедимся, что система интегральных уравнений для определения $\varphi(\tau)$, $\psi_z(\tau)$, $\psi(\tau)$ имеет решение. Применяя преобразование Лапласа к равенствам, связывающим $\vec{u}(t,\rho)$ и потенциалы, и к равенствам, связывающим напряжения и потенциалы, и исключая $L_1\varphi, L_1\psi_z$, $L_1\psi$, придем к решению

$$\vec{u}(t,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}A(s,\rho)\,B^{-1}(s,1)\,L_1\vec{f}(t,1)\,ds, \tag{14}$$

где матрица $B(s,1)$ находится так: предположив смещения в виде

$$\vec{u}\,e^{in\theta+i\lambda z}=e^{in\theta+i\lambda z}A(s,\rho)\,\vec{c},$$

где $\vec{c}=\mathrm{const}$, определим напряжение $\vec{f}(t,1)\,e^{in\theta+i\lambda z}$ на поверхности $\rho=1$. Тогда равенство $\vec{f}=B(s,1)\,\vec{c}$ и определяет матрицу $B(s,1)$.

6. Выше предполагалось, что $n\neq0$, $\lambda\neq0$. Если $n=0$ или $\lambda=0$ или $n=\lambda=0$, то рассуждения несколько усложняются, хотя конечный результат остается тем же.

Поступило
19 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Мюнтц, Интегральные уравнения, 1, 1931, стр. 189. [2] Х. Л. Смолицкий, ДАН, **54**, № 7 (1946).