Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

О ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 X 1946)

В этой заметке рассматриваются двойные интегралы в параметрической форме без предположения о дифференцируемости подинтегральной функции. Условие квази-регулярности интеграла, введенное Tonelli, заменяется условием выпуклости. Вводится функционал, обобщающий понятие площади непрерывной поверхности по Лебегу. Из равенства этого функционала интегралу Лебега следует теорема о полунепрерывности снизу двойного интеграла, обобщающая результат Radò ([1]).

1. Будем считать, что непрерывная поверхность $T: x(u)$ определяется тремя функциями $x^i(u)$, $i=1,2,3$, непрерывными в области D: $0 \leqslant u^1 \leqslant 1$, $0 \leqslant u^2 \leqslant 1$.

Поверхность T: $x(u)$ будем причислять к классу $\mathfrak{S}$, если функции $x^i(u)$, $i=1,2,3$, линейны в каждом из треугольников некоторого разбиения области D на конечное число треугольников.

Поверхность $T: x(u)$ будем причислять к классу $\mathfrak{H}$, если производные функции $x^i(u^1, u^2)$ первого порядка существуют почти всюду в D и если интеграл

$$(T, D) = \iint\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2 \right\}^{1/2} du^1\, du^2$$

имеет конечное значение.

Поверхность T: $x(u)$ будем причислять к классу $\mathfrak{A}$*, если $T \in \mathfrak{H}$ и если существует такая последовательность $\{T_n\}$, $T_n \in \mathfrak{S}$, $n=1,2,\ldots$, что $\| T_n, T \| \to 0$, $(T_n, D) \to (T, D)$ при $n \to \infty$.

Здесь и далее для T_1: $x_1(u)$, $T_2: x_2(u)$

$$\| T_1, T_2 \| = \max_{u \in D} \| x_1(u) - x_2(u) \|,$$

$\| x \|$ означает длину вектора x.

Ориентированной непрерывной поверхностью $\circ T: x(u)$ будем называть непрерывную поверхность $T: x(u)$, снабженную определенной ориентацией области D.

Соответственно определяются ориентированные поверхности классов $\circ\mathfrak{S}$, $\circ\mathfrak{H}$, $\circ\mathfrak{A}$.

2. $A = (\xi, \lambda)$ будем обозначать бивектор A, определяемый парой векторов $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$, A^{ij} — компоненты бивектора A, $A^{ij} = \xi^i \lambda^j - \xi^j \lambda^i$, $i, j = 1, 2, 3$. Линейные операции над бивекторами понимаются как линейные операции над их компонентами.

* Этот класс поверхностей был определен Radò в работе ([1]).

3. Функцию $F(\xi, \lambda)$, определенную для каждой пары векторов ξ, λ, будем называть нормирующей функцией, если $F(\xi, \lambda)$ непрерывна по совокупности шести переменных ξ^i, λ^i, $i = 1, 2, 3$, и обладает следующими свойствами:

(3, 1) $F(\xi, \lambda)$ определяется только значениями компонент бивектора $A = (\xi, \lambda)$. Будем писать: $F(\xi, \lambda) = F(A)$.

(3, 2) $F(\xi, \lambda) > 0$, если $A = (\xi, \lambda) \neq 0$.

(3, 3) Для любых двух бивекторов A_1, A_2 имеет место $F(A_1 + A_2) \leqslant F(A_1) + F(A_2)$.

(3, 4) $F(aA) = |a| F(A)$ для произвольного бивектора A и любого действительного a.

4. Положим $\| A \| = [(A^{12})^2 + (A^{23})^2 + (A^{31})^2]^{1/2}$.
В силу (3, 4) и непрерывности функции $F(\xi, \lambda)$ будем иметь:

$$m = \inf_{\| A \| = 1} F(A) > 0, \quad M = \sup_{\| A \| = 1} F(A) < +\infty,$$

$$m \| A \| \leqslant F(A) \leqslant M \| A \|.$$

5. Пусть $\Delta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — ориентированный треугольник, вершины которого суть концы векторов ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ориентация определяется порядком следования вершин (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Положим $A_1 = (\xi_2, \xi_3)$, $A_2 = (\xi_3, \xi_1)$, $A_3 = (\xi_1, \xi_2)$.

Нормирующей функции $F(\xi, \lambda)$ поставим в соответствие функцию ориентированного треугольника $F(\Delta)$, которую будем называть двумерной метрикой, полагая

$$F(\Delta) = F(A_1 + A_2 + A_3).$$

Двумерная метрика $F(\Delta)$ обладает следующими свойствами:

(5, 1) Величина $F(\Delta)$ не меняется при изменении порядка следования вершин ξ_1, ξ_2, ξ_3 треугольника Δ, не меняющем ориентации треугольника Δ.

(5, 2) Пусть $\Delta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\Delta_1 = (\xi_1 - \xi, \xi_2 - \xi, \xi_3 - \xi)$; тогда $F(\Delta) = F(\Delta_1)$.

(5, 3) Пусть $\tilde{T}$: $\tilde{x}(u) \in \mathfrak{S}$, T: $x(u)$ — плоскость, т. е. $x^i(u)$, $i = 1, 2, 3$, линейные функции величин u^1, u^2, и $\tilde{x}(u) = x(u)$ на границе квадрата $K \subset D$: $\overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_n$ — триангуляция квадрата K такая, что в каждом треугольнике $\overline{\Delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, функции $\tilde{x}^i(u)$, $i = 1, 2, 3$, линейны.

Будем считать, что все треугольники $\overline{\Delta}_i$ ориентированы одинаково и та же ориентация приписана квадрату K.

Если $\overline{\Delta}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, где u_{i1}, u_{i2}, u_{i3} — вершины треугольника $\overline{\Delta}_i$, расположенные в порядке, определяющем его ориентацию, то полагаем

$$\tilde{\Delta}_i = (\tilde{x}(u_{i1}), \tilde{x}(u_{i2}), \tilde{x}(u_{i3})),$$

$$\Delta_i = (x(u_{i1}), x(u_{i2}), x(u_{i3})), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F(K, T) = \sum_{i=1}^{n} F(\Delta_i).$$

Тогда имеет место неравенство

$$F(K, T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} F(\tilde{\Delta}_i).$$

(5, 4) Если $|\Delta|$ есть площадь треугольника Δ, то

$$m |\Delta| \leqslant F(\Delta) \leqslant M |\Delta|,$$

где m и M — положительные числа, не зависящие от треугольника Δ. (5, 4) следует из 4.

6. Пусть действительная функция $F(x, \xi, \lambda)$ определена для всех точек $x \in G$: $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$, и для всех значений $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$.

Будем говорить, что $F(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условию (C), если

(6,1) $F(x, \xi, \lambda)$ при фиксированном $x \in G$ есть нормирующая функция в смысле п. 3: $F(x, \xi, \lambda) = F(A)$.

(6, 2) $F(x, \xi, \lambda)$ есть функция непрерывная по совокупности девяти переменных x^i, ξ^i, λ^i, $i = 1, 2, 3$.

По п. 5 функция $F(x, \xi, \lambda)$ определяет в каждой точке $x \in G$ двумерную метрику $F(x, \Delta)$.

Из (6, 1), (6, 2) вытекает следующее утверждение:

(6, 3) Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из $x_1, x_2 \in G$, $\| x_1 - x_2 \| < \delta$, следует $| F(x_1, \Delta) - F(x_2, \Delta) | < \varepsilon | F(x_1, \Delta) + F(x_2, \Delta)$ для произвольного треугольника Δ.

7. Пусть $_\circ T \in \circ \mathfrak{S}$, T: $x(u)$; $\overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_p$ — триангуляция области D такая, что в каждом из треугольников $\overline{\Delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, функции $x^i(u)$, $i = 1, 2, 3$, линейны, Δ_k соответствует треугольнику $\overline{\Delta}_k$ на T; функция $F(x, A)$ удовлетворяет условию (C).

Треугольники $\overline{\Delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ считаем ориентированными так же, как и область D, имеющая определенную ориентацию, в силу того, что поверхность $\circ T$ считается ориентированной (см. п. 1). Тогда соответствующую ориентацию получат треугольники Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Положим

$$[_\circ T, D, F]_p = \sum_{i=1}^{p} F(x_i, \Delta_i),$$

где $x_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Пусть $d(\overline{\Delta}_i)$ — диаметр треугольника $\overline{\Delta}_i$; $r(x_i, \Delta_i)$ — кратчайшее расстояние от точки x_i до треугольника Δ_i.

Если $\circ T$: $x(u)$ есть непрерывная ориентированная поверхность в смысле п. 1 и $F(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условию (C), то определим функционал $[\circ T, D, F]$ как наименьший из пределов величин $[_\circ T, D, F]_{p_n}$ при $n \to \infty$ при всех возможных определениях последовательностей $_\circ T_n \in \mathfrak{S}$, триангуляций $\overline{\Delta}^n{}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p_n$, квадрата D и точек x_{in}, $i = 1, 2, \ldots, p_n$, удовлетворяющих условиям:

(7, 1) поверхность $\circ T_n$ ориентирована одинаково с поверхностью $_\circ T$, $n = 1, 2, \ldots$

(7, 2) $\| T_n, T \| \to 0$ при $n \to \infty$.

(7, 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{i} d(\Delta_i^n) = 0$.

(7, 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{i} r(x_i^n, \Delta_i^n) = 0$.

Из (6, 3) получаем, что $[_\circ T, D, F]$ не зависит от выбора последовательности групп точек x_i^n, $i = 1, 2, \ldots, p_n$, $n = 1, 2, \ldots$

8. Для любой поверхности $\circ T \in \circ \mathfrak{H}$, T: $x(u)$, можно определить интеграл:

$$(_\circ T, D, F) = \iint\limits_{D} F(x, \xi, \lambda)\, du^1\, du^2,$$

где

$$x = x(u^1, u^2), \quad \xi = (\partial x^1/\partial u^1, \partial x^2/\partial u^1, \partial x^3/\partial u^1),$$
$$\lambda = (\partial x^1/\partial u^2, \ \partial x^2/\partial u^2, \ \partial x^3/\partial u^2),$$

причем тот или иной порядок обхода области D при интегрировании определяется ориентацией поверхности $_\circ T$.

9. Теорема. *Пусть* $_\circ T \in \mathfrak{A}$, *функция* $F(x, \xi, \lambda)$ *удовлетворяет условию* (C).

Тогда $[_\circ T, D, F] = (_\circ T, D, F)$.

Если $_\circ T \in {}_\circ\mathfrak{H}$, то $[_\circ T, D, F] \geqslant (_\circ T, D, F)$.

Теорема доказывается с помощью (5, 3) и (6, 3).

10. Теорема. *Пусть* $_\circ T, {}_\circ T_n \in {}_\circ\mathfrak{A}$, *одинаково ориентированные поверхности,* $n = 1, 2, \ldots$, $\| T_n, T \| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $F(x, \xi, \lambda)$ *удовлетворяет условию* (C).

Тогда

$$\liminf_{n \to \infty} (_\circ T_n, D, F) \geqslant (_\circ T, D, F).$$

Теорема следует непосредственно из полунепрерывности снизу функционала $[_\circ T, D, F]$ и из теоремы п. 9.

Изложенный метод допускает обобщение на интегралы любой кратности.

Математический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 I 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Radò, TAMS, **51**, 336 (1942).