Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

О КОНКРЕТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

Линейным полуупорядоченным пространством (K-пространством) называется, как известно, линейное множество X, в котором для некоторых элементов $x \in X$ определено соотношение $x > 0$, причем выполняются следующие пять аксиом Л. В. Канторовича:

1) если $x > 0$, то невозможно $x = 0$;
2) если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $x_1 + x_2 > 0$;
3) каков бы ни был элемент $x \in X$, существует элемент x_1 такой, что $x_1 \geqslant 0$ и $x_1 \geqslant x$;
4) если $\lambda > 0$ и $x > 0$, то $\lambda x > 0$ (λ — вещественное число);
5) для всякого ограниченного сверху множества E существует точная верхняя граница $\sup E$.

Одной из основных проблем теории K-пространств является проблема конкретного представления таких пространств в виде пространств вещественных функций, заданных на некотором множестве, с обычными определениями алгебраических операций и полуупорядоченности (см., например, (1)).

В ряде исследований М. Крейна, С. Крейна, S. Kakutani, H. F. Bohnenblust'a и др. дано положительное решение этой проблемы для некоторых специальных типов линейных полуупорядоченных и, вместе с тем, нормированных в смысле Banach'a пространств. Особый интерес представляет работа S. Kakutani, посвященная конкретному представлению введенных G. Birkhoff'ом абстрактных L-пространств.

Абстрактным L-пространством называется пространство Banach'a и одновременно линейная полуупорядоченная система (linear lattice), удовлетворяющее следующим дополнительным условиям:

1) если $x > 0$ и $y > 0$, то $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$;
2) если $\inf(x, y) = 0$, то $\|x + y\| = \|x - y\|$;
3) если $x_n \geqslant y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ (по норме), то $x \geqslant y$.

Основной результат Kakutani заключается в следующем: для всякого абстрактного L-пространства с единицей (AL) существует бикомпактное хаусдорфово пространство Ω и вполне аддитивная мера $m(E)$, определенная для всех борелевых множеств $E \subset \Omega$, такие, что (AL) изоморфно и изометрично пространству $L(\Omega; m)$ всевозможных измеримых функций $x(t)$, суммируемых по отношению к $m(E)$ в Ω ($\|x\| = \int\limits_{\Omega} |x(t)|\, m(dE)$, $x \geqslant y$: $x(t) \geqslant y(t)$). Естественно поставить вопрос о возможности распространения предложения Kakutani (надлежащим образом видоизмененного) на случай произвольного полуупорядоченного пространства. Решению этой задачи и посвящена настоящая заметка.

В одной из моих работ (4) доказано следующее предложение:

для всякого элементарного K-пространства X (элементарным называется пространство с единицей, в котором всякое множество попарно дизъюнктных элементов не более, чем счетное) существует пространство типа $(KB)_5$, максимальное расширение которого изоморфно $\tilde{X}$ — максимальному расширению X.

В пространствах типа $(KB)_5$ выполняются все аксиомы абстрактного L-пространства, и так как максимальным расширением $L(\Omega; m)$ является, очевидно, пространство $S(\Omega; m)$ всевозможных измеримых функций $x(t)$, заданных в Ω $(x \geqslant y : x(t) \geqslant y(t)$ почти везде в $\Omega)$, то имеет место

Теорема 1. *Для всякого элементарного K-пространства X существует пространство $S(\Omega; m)$ такое, что X изоморфно его нормальному подпространству.*

Из теоремы 1 и принадлежащей мне теоремы о разложении произвольного K-пространства в дизъюнктную сумму элементарных пространств ([4]) непосредственно вытекает следующее основное предложение:

Теорема 2. *Пусть X — произвольное K-пространство и*

$$X = \Sigma X_\alpha \qquad (\alpha \in A)$$

его разложение в дизъюнктную сумму элементарных подпространств; тогда (по теореме 1) для каждого $\alpha \in A$ существует бикомпактное хаусдорфово пространство Ω_α с вполне аддитивной мерой $m(E)$, определенной для всех борелевых множеств $E \subset \Omega_\alpha$, такое, что X_α нормально содержится в пространстве измеримых функций $S(\Omega_\alpha; m)$, заданных в Ω_α. Если символом Ω обозначить теоретико-множественную сумму пространств Ω_α и ввести в рассмотрение пространство $S(\Omega; m)$ функций, заданных в Ω и измеримых на каждом Ω_α, то X изоморфно нормальному подпространству пространства $S(\Omega; m)$. При этом максимальное расширение X изоморфно $S(\Omega; m)$

$$\tilde{X} = S(\Omega; m)$$

и единице X соответствует единица $S(\Omega; m)$.

Таким образом, вопрос о конкретном представлении произвольного линейного полуупорядоченного пространства Канторовича решается полностью в положительном смысле.

Для сепарабельных K-пространств теорема 2 была установлена мною ранее ([5]) (без использования теоремы Kakutani) в следующей формулировке:

Всякое сепарабельное K-пространство X разлагается в дизъюнктную сумму пространств измеримых функций, заданных в сегменте $[0, 1]$, и пространств числовых последовательностей *.

С помощью гипотезы континуума этот результат может быть усилен, именно:

Всякое сепарабельное K-пространство нормально содержится в дизъюнктной сумме $S + s$ (S — пространство измеримых функций в сегменте $[0, 1]$, s — пространство всевозможных числовых последовательностей).

Теорема 2 позволяет ввести в K-пространствах операцию умножения элементов наиболее естественным образом. Пусть X — K-пространство, $\tilde{X}$ — его максимальное расширение и $S(\Omega; m)$ — пространство измеримых функций, заданных в Ω, изоморфное $\tilde{X}$,

$$\tilde{X} = S(\Omega; m) \qquad (*)$$

* Если X — непрерывное пространство, в разложении отсутствуют дискретные компоненты; если X — дискретное пространство, отсутствуют непрерывные компоненты.

Каждой паре x, y элементов X отвечает в $S(\Omega; m)$ пара соответствующих им функций $x(t)$, $y(t)$. Произведение $z(t) = x(t)\,y(t)$ есть снова измеримая функция, принадлежащая $S(\Omega; m)$, в изоморфизме $(*)$ ей отвечает некоторый элемент z, принадлежащий X или его расширению $\tilde{X}$.

Элемент z назовем произведением элементов x и y.

Определенное таким образом умножение обладает, очевидно, обычными свойствами: ассоциативностью, коммутативностью и т. д. В моей предыдущей заметке ([6]) была указана общая форма вполне линейного функционала в K-пространстве.

С помощью теоремы 2 легко показать, что:

Общая форма линейного функционала в K-пространстве дается формулой

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\,y(t)\,m(dE),$$

где $x = x(t)$ $(x \in X)$, а $y(t)$ — произвольная фиксированная измеримая функция в Ω.

Поступило
27 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Изв. АН СССР, сер. матем., **91** (1937). [2] М. Крейн и С. Крейн, Матем. сб., **13** (55), № **1** (1943). [3] S. Kakutani, Ann. Math., **42**, № 4, 994 (1941). [4] А. Г. Пинскер, ДАН, **49**, № 3 (1945). [5] А. Г. Пинскер, ДАН, **49**, № 5 (1945). [6] А. Г. Пинскер, ДАН, **55**, № 4 (1947).