Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КРЫЛОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 VI 1946)

Пусть S — открытая, конечная или бесконечная область n-мерного пространства E_n; S' — конечная область, замыкание которой принадлежит S. Точку $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства E_n сокращенно обозначим символом x и интеграл по области S будем записывать $\int\limits_S \ldots dx$ вместо $\int\limits_S \ldots \int \ldots dx_1 \ldots dx_n$.

Обозначим $L^{(p)}$ множество всех функций $u(x)$, суммируемых со степенью $p \geqslant 1$ в каждой области $S' < S$, и $\vartheta^{(p)}$ — множество всех функций p раз непрерывно дифференцируемых в S. $\dot{L}^{(p)}$ $(\dot{\vartheta}^{(p)})$ назовем множество всех функций из $L^{(p)}$ $(\vartheta^{(p)})$, обращающихся в нуль вне некоторой $S' < S$.

Наряду с функциями $u(x)$ в E_n нам придется иметь дело с векторами $u'(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$. Множество таких систем функций из $L^{(p)}, \dot{L}^{(p)}, \vartheta^{(p)}, \dot{\vartheta}^{(p)}$ мы обозначим, соответственно, $L'^{(p)}, \dot{L}'^{(p)}, \vartheta'^{(p)}, \dot{\vartheta}'^{(p)}$.

Ниже две функции или два вектора считаются равными, если они различаются между собой только на множестве меры нуль.

Если $u(x)$ из $\vartheta^{(p)}$, то оператор $\partial^p / \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}$ частной производной порядка p для нее определяется обычным путем. Для распространения его на пространство $L^{(1)}$ пользуются интегральными равенствами, аналогичными формулам Грина и Гаусса. Для всякой пары функций $u(x) \in \vartheta^{(p)}$ и $w(x) \in \dot{\vartheta}^{(p)}$ имеет место

$$\int\limits_S w(x) \frac{\partial^p u(x)}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}} dx = (-1)^p \int\limits_S \frac{\partial^p w(x)}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}} u(x)\, dx.$$

Говорят, что функция $v(x)$ из $L^{(1)}$ есть обобщенная частная производная $D_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ порядка p от $u(x) \in L^{(1)}$: $D_{\nu_1 \ldots \nu_p} u(x) = v(x)$, если

$$\int\limits_S wv\,dx = (-1)^p \int\limits_S \frac{\partial^p w}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}} u\,dx \tag{1}$$

для всякой функции $w(x) \in \dot{\vartheta}^{(p)}$. Иначе говоря, считают, что оператор $D_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ в $L^{(1)}$ есть сопряженный с оператором $\partial^p / \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}$ обычной частной производной в $\dot{\vartheta}^{(p)}$.

Пусть $u(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Под D мы понимаем оператор градиента, который преобразует функцию $u(x)$ в вектор

$$Du(x) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}.$$

Если $u'(x)$ — непрерывно дифференцируемый вектор, то под D^* условимся понимать оператор расходимости с обратным знаком, переводящий $u'(x)$ в непрерывную функцию

$$D^* u'(x) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Кроме D и D^* мы будем рассматривать операторы ∇_r и сопряженные с ними операторы ∇_r^*, которые являются произведениями D и D^*

$$\begin{aligned} \nabla_{2p} &= D^*D \ldots D^*D, & \nabla_{2p+1} &= DD^* \ldots D^*D, \\ \nabla_{2p}^* &= D^*D \ldots D^*D = \nabla_{2p}, & \nabla_{2p+1}^* &= D^*D \ldots DD^*. \end{aligned} \tag{2}$$

Этими равенствами оператор ∇_r определяется в функциональном пространстве $\vartheta^{(r)}$ и преобразует r раз непрерывно дифференцируемую функцию в непрерывную функцию или непрерывный вектор, в зависимости от того, будет ли r четным или нечетным.

Для обобщения ∇_r на пространство суммируемых функций пользуются, как и в случае частных производных, интегральными соотношениями, а именно, если $u \in \vartheta^{(r)}$ и функция $w \in \mathring{\vartheta}^{(r)}$ или вектор $w' \in \mathring{\vartheta}'^{(r)}$, то имеют место равенства:

$$\int_S w \nabla_{2p} u dx = \int_S \nabla_{2p}^* w u dx \qquad \text{при } r = 2p; \tag{3,1}$$

$$\int_S w' \nabla_{2p+1} u dx = \int_S \nabla_{2p+1}^* w' u dx \qquad \text{при } r = 2p+1. \tag{3,2}$$

Если для $u(x) \in L^{(1)}$ существует такая функция $v(x) \in L^{(1)}$ (вектор $v'(x) \in L'^{(1)}$), что при всяких $w(x) \in \mathring{\vartheta}^{(2p)}$ $(w'(x) \in \mathring{\vartheta}'^{(2p+1)})$:

$$\int_S wv dx = \int_S \nabla_{2p}^* w u dx; \tag{4,1}$$

$$\int_S w'v' dx = \int_S \nabla_{2p+1} w' u dx, \tag{4,2}$$

то говорят, что к функции $u(x)$ применим оператор ∇_{2p} (∇_{2p+1}) и считают $\nabla_{2p} u = v$ $(\nabla_{2p+1} u = v')$ *.

Известно, что если к функции $u(x)$ применим оператор ∇_r достаточно высокого порядка r, то $u(x)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные нескольких первых порядков. Более точно: введем число $m = [n/p] + 1$, $p \geqslant 1$. Тогда, если $\nabla_r u(x)$ существует и принадлежит $L^{(p)}$, то функция $u(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка $r - m$ включительно. Впервые эта теорема, при ограничительном предположении о существовании всех обобщенных частных производных порядка r и $p = 2$, была доказана академиком С. Л. Соболевым и обобщена В. Кондрашовым на любые значения p(1–3). В том виде, как она сформулирована нами, также при $p = 2$, теорема была позже установлена К. Фридриксом (4). Однако, при легком изменении его рассуждений, она может быть доказана для каких угодно $p \geqslant 1$. Вопрос о существовании производных у функции порядка более высокого, чем $r - m$, остался, насколько нам известно, открытым.

Может быть доказана следующая

Т е о р е м а. *Если $\nabla_r u(x)$ существует и принадлежит простран-*

---

* Приведенные определения означают, что оператор ∇_{2p} в $L^{(1)}$ является сопряженным ∇_{2p}^* в $\mathring{\vartheta}^{(2p)}$ и оператор ∇_{2p+1} в $L^{(1)}$ сопряженным оператору ∇_{2p+1}^* в векторном пространстве $\mathring{\vartheta}'^{(2p+1)}$.

ству $L^{(p)}$, *то* $u(x)$ *имеет все обобщенные частные производные* $D_{\nu_1} \ldots {}_{\nu_s} u(x)$ *любого порядка s, меньшего r.*

Если $p > 1$, то каждая из обобщенных частных производных $D_{\nu_1} \ldots {}_{\nu_s} u(x)$ порядка s принадлежит $L^{(q)}$ при $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{r-s}{n}$; если же $p = 1$, то $D_{\nu_1} \ldots {}_{\nu_s} u(x)$ принадлежит $L^{(q)}$ при $q < \frac{n}{n-r+s}$.

Наметим доказательство теоремы. Воспользуемся истокообразным представлением функций, имеющих обычные частные производные, через фундаментальную функцию или вектор сопряженного оператора. Его обычно применяют к средней функции и затем, при помощи предельного перехода, делают заключения о рассматриваемой функции.

Усреднение может быть проделано многими способами. Выберем, например, тот, который был употреблен К. Фридриксом [4]. Пусть S' — любая область $< S$. Назовем S_a' множество всех точек y таких, что куб $|x_i - y_i| < a$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеет по крайней мере одну точку, общую S'; a можно выбрать настолько малым, чтобы было $S'_{2a} < S$.

Возьмем произвольную функцию $e(t)$, имеющую производные всех порядков и обладающую свойствами: $e(t) \geqslant 0$ или $= 0$ для $|t| \leqslant 1$ или $|t| > 1$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e(t)\,dt = 1$. За ядро усреднения примем

$$j_a(y - x) = a^{-n} e\left(\frac{y_1 - x_1}{a}\right) \ldots e\left(\frac{y_n - x_n}{a}\right).$$

Сообразно с этим, средняя функция для $u(x)$ в S' будет равна

$$J_a u(x) = \int\limits_{S'_a} j_a(y - x)\, u(y)\, dy. \tag{5}$$

Если $u(x)$ из $L^{(p)}$, то $J_a u(x)$ будет иметь производные всех порядков и принадлежать множеству $\dot{\mathfrak{H}}^{(r)}$ при любых r. Нам потребуются следующие просто устанавливаемые свойства средней функции:

$$\int\limits_{S'} |J_a u(x) - u(x)|^p\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0; \tag{6}$$

$$\nabla_r J_a u(x) = J_a \nabla_r u(x). \tag{7}$$

Фундаментальная функция или вектор сопряженного оператора ∇_r^* с полюсом в начале координат имеет, как известно, вид:

$$\mathfrak{G}^r(x) = |x|^{-n+r}(\gamma_r + \beta_r \ln|x|) \quad \text{для четного } r;$$

$$\mathfrak{G}^r(x) = \{\mathfrak{G}_1^r, \ldots, \mathfrak{G}_n^r\},$$

$$\mathfrak{G}_\nu^r = x_\nu |x|^{-n+r-1}(\gamma_r + \beta_r \ln|x|) \quad \text{для нечетного } r.$$

Под $|x|$ здесь понимается расстояние от точки наблюдения x до полюса, а β_r и γ_r — некоторые постоянные, численные значения которых не представляют для нас интереса.

Введем функцию $\eta_R(t)$, определенную при $t \geqslant 0$, имеющую производные всех порядков и удовлетворяющую условиям: $\eta_R(t) = 1$ при $t \leqslant R$, $0 < \eta_R(t) \leqslant 1$ при $R < t < 2R$ и $\eta_R(t) = 0$ при $t \geqslant R$. Возьмем $S' < S$ и выберем R настолько малым, чтобы было $S'_{2R} < S$. Для $x_0 \in S'$ положим $K^r(x_0, x) = \eta_R(|x - x_0|)\, G^r(x - x_0)$. Эта функция обращается в нуль вне S'_{2R} и, кроме того, $\nabla_r^* K^r(x_0, x) = 0$ вне S''_{2R} и в шаре $|x - x_0| < R$.

Если функция $v(x)$ определена в S и имеет непрерывные производные до порядка r, то при помощи $K^r(x_0, x)$ она представляется следующей формулой

$$v(x_0) = -\int_S K^r(x_0, x)\nabla_r v(x)\,dx + \int_S \nabla_r^* K^r(x_0, x)\,v(x)\,dx.$$

Выберем за область усреднения S'_{2R} и применим это равенство к средней функции $J_a u(x)$. Если от обеих частей результата взять частную производную $D_{\nu_1 \dots \nu_s}$ по координатам точки x_0 любого порядка $s < r$, то, ввиду возможности дифференцирования под знаком интеграла, получим

$$D^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} J_a u(x_0) = -\int_S D^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} K^r(x_0, x)\nabla_r J_a u(x)\,dx + \\ + \int_S D^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_r^* K^r(x_0, x)\,J_a u(x)\,dx. \tag{8}$$

Пусть $a \to 0$. Поведение второго слагаемого правой части равенства при этом весьма просто. Ядро $D^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_r^* K^r(x_0, x)$ этого интеграла отлично от нуля лишь в сферическом слое $R < |x - x_0| < 2R$ и ограничено там. Ввиду (6) интеграл будет равномерно сходиться к предельной функции $\int_S D^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_r^* K^r(x_0, x)\,u(x)\,dx$, имеющей производные всех порядков. Интерес при предельном переходе представляет первое слагаемое правой части равенства.

Будем считать $p > 1$. Можно показать, что при $a \to 0$ последовательность первых интегралов в пространстве $L^{(q)}$ для $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{r-s}{n}$ является фундаментальной в смысле признака Коши. Этого легко достигнуть, если воспользоваться следующей теоремой академика С. Л. Соболева об интегралах типа потенциала.

Если $f(x)$ суммируема со степенью $p > 1$, то функция

$$U(x_0) = \int_S |x - x_0|^{-\lambda} f(x)\,dx, \quad 0 < \lambda < n,$$

суммируема во всем пространстве со степенью q, где $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{n} - 1 + \frac{1}{p}$.

Кроме того, имеет место неравенство

$$\left\{\int |U(x_0)|^q\,dx_0\right\}^{1/q} \leqslant N\left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

где N есть некоторая постоянная, не зависящая от $f(x)$.

Так как пространство $L^{(q)}$ является полным, то будет существовать предельная функция при $a \to 0$ для первого интеграла правой части равенства (8) и, стало быть, последовательность $D_{\nu_1 \dots \nu_s} J_a u(x)$ будет сходящейся в пространстве $L^{(q)}$. Без труда проверяется, что предельная функция будет обобщенной частной производной $D_{\nu_1 \dots \nu_s}$ от $u(x)$. Этим доказывается первая часть теоремы, относящаяся к случаю $p > 1$.

Если $p = 1$, то фундаментальность в смысле признака Коши последовательности первых интегралов из равенства (8) при $a \to 0$ в пространстве $L^{(q)}$ для $q < \frac{n}{n - r + s}$ может быть доказана более простыми средствами — путем применения неравенства Гельдера к оценке разности значений этого интеграла для двух малых значений параметра. Все остальные рассуждения сохраняются.

Ленинградский государственный
университет

Поступило
22 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 1 (10), 7 (84), 267 (1936). [2] С. Соболев, Математ. сб., 2 (44): 3, 465 (1937). [3] В. Кондрашов, ДАН, 18, 235 (1938). [4] K. Friedrichs, Am. J. Math., 61, № 2 (1939). [5] С. Соболев, Математ. сб., 4 (46): 3, 471, 1938.