Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. МЫШКИС

О МЕТОДЕ А. HAAR'А В ВОПРОСЕ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ CAUCHY ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 VII 1947)

§ 1. Из известной леммы А. Haar'а ([1-3], см. также [4], § 3) вытекает, в частности, следующее утверждение.

Пусть в n-мерном пространстве $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$* дана область G с границей Γ, лежащая в полупространстве $x_1 > 0$. Пусть множество M, открытое в Γ, лежит в гиперплоскости $x_1 = 0$. Пусть на G задана функция u, обладающая в каждой точке G полным дифференциалом, удовлетворяющая для некоторого постоянного $C > 0$ неравенству

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant C\left(\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + |u|\right)$$

и стремящаяся к 0 при приближении по G к любой точке M. Тогда $u \equiv 0$ на пересечении G с некоторой окрестностью M.

Из этого следует, очевидно, теорема о единственности решения задачи Cauchy для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \ldots, x_n)u + f(x_1, \ldots, x_n)$$

при ограниченных a_i и b, когда u задается на $x_1 = 0$ (подробности см. в [4], § 3).

В применении к системам естественно возникает следующий вопрос. Пусть на G заданы $k \geqslant 2$ функций $u_1, \ldots, u_k$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right| \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right| + |u_j|\right)\right), \tag{1}$$

причем $\sum_{1}^{k}|u_j| \to 0$ при приближении к каждой точке M по G. Будет ли $\sum_{1}^{k}|u_j| \equiv 0$ на пересечении G с некоторой окрестностью M?

В настоящей заметке мы даем:

а) положительный ответ, если все u_j голоморфны по x_1 в каждой точке M, причем радиусы сходимости на M имеют поло-

* В настоящей заметке все величины предполагаются вещественными.

жительную нижнюю грань и, кроме этого, все u_j имеют все непрерывные производные вида $\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p-1}\partial x_i}$ $(i=1,\ldots,n;\ p=1,2,\ldots)$ на G вплоть до M;

b) отрицательный ответ, если в требованиях a) отказаться от ограничения на радиусы сходимости, даже если требовать дополнительно существование и непрерывность всех частных производных от u_j всех порядков на G вплоть до M.

Указывается также связь этих вопросов с вопросом о единственности решения задачи Cauchy.

§ 2. Утверждение a) сразу следует из

Леммы. *Пусть функции $u_1,\ldots,u_k$ $(k\geqslant 1)$, удовлетворяющие в G (1) и стремящиеся к 0 при приближении по G к каждой точке M, обладают всеми непрерывными частными производными вида $\frac{\partial^p u_j}{\partial x_1^{p-1}\partial x_i}$ $(i=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,p_0\ (p_0\geqslant 1);\ j=1,\ldots,k)$ на G вплоть до M. Тогда предельные значения этих производных равны 0 всюду в M.*

Действительно, из $\sum\limits_1^k|u_j|\to 0$ сразу следует, что $\sum\limits_{j=1}^k\sum\limits_{i=2}^n\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right|\to 0$ при подходе к любой точке M. Тогда из (1) сразу следует, что $\sum\limits_1^k\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right|\to 0$. Пусть теперь наше утверждение доказано для предельных значений производных до $m-1$-го порядка включительно $(2\leqslant m\leqslant p_0)$; докажем его для предельных значений производных m-го порядка.

Для всех производных, кроме $\frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^m}$, утверждение следует из того, что существующий предел производной от $\frac{\partial^{m-1}u_j}{\partial x_1^{m-1}}$ по любому направлению, параллельному гиперплоскости $x_1=0$, равен производной от предела $\frac{\partial^{m-1}u_j}{\partial x_1^{m-1}}$, равного 0 на M, взятой на M по этому направлению.

Для изучения $\frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^m}$ заметим, что, в силу (1),

$$C\min\left\{\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=2}^n\pm\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\pm u_j\right)\right\}\leqslant\frac{\partial u}{\partial x_i}\leqslant C\max\left\{\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=2}^n\pm\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\pm u_j\right)\right\},$$

где min и max берутся по всем комбинациям $\pm$. Согласно предыдущему, при любых фиксированных $x_2,\ldots,x_n$ $(\{0,x_2,\ldots,x_n\}\in M)$ и любой такой комбинации $\sum\limits_{j=1}^k\left(\sum\limits_{i=2}^n\pm\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\pm u_j\right)$ стремится к 0 при $0<x_1\to 0$ вместе со всеми своими производными по x_1 до $m-1$-го порядка включительно. Отсюда при тех же $x_2,\ldots,x_n$ будет

$$\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right|=o\left(x_1^{m-1}\right)\qquad (x_1\to 0),$$

откуда, в силу существования $\lim\limits_{x_1\to 0} \dfrac{\partial^m u_j}{\partial x_1^m}$, легко следует, что

$$\lim_{x_1\to 0} \frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^m} = 0,$$

что и нужно.

Следствием утверждения a) является теорема о единственности решения задачи Cauchy для систем уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2}^{n} a_{ijs}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} b_{js}(x_1, \ldots, x_n) u_j + f_s(x_1, \ldots, x_n)$$

$$(s = 1, \ldots, k), \tag{2}$$

если все a_{ijs} и b_{js} ограничены на G, все u_j задаются на M — в классе функций, описанных в утверждении a) (в частности, в классе функций, аналитических по совокупности $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности M). Более обще, эта теорема справедлива для систем

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_1} = F_s\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)$$

$$(s = 1, \ldots, k)$$

в том же классе решений, если все F_s удовлетворяют в своей области существования условию Lipschitz'a по $u_1, \ldots, \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n}$.

§ 3. Утверждение b) получится в результате построения примера неединственности решения задачи Cauchy для линейной системы вида (2) с непрерывными коэффициентами. Более детально, мы приведем пример системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_1(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3}$$

у которой коэффициенты a_1, b_1, a_2 и b_2 непрерывны при $x \geqslant 0$, имеют все непрерывные производные всех порядков при $x > 0$ и имеют в каждой точке оси OY нуль бесконечного порядка. Для системы (3) мы построим решение u^*, v^*, имеющее при $x \geqslant 0$ все непрерывные производные всех порядков и голоморфное по x при $x = 0$, обращающееся в 0 при $x = 0$, но не исчезающее тождественно ни в какой окрестности $\{0, 0\}$.

Система имеет двукратное характеристическое направление (т. е. параболична) в каждой точке полуплоскости $x \geqslant 0$.

Для построения мы положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ e^{\frac{-1}{|x| - x^2}} & \text{при } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } |x|\geqslant 2, \\ \int\limits_{|x|}^{2} e^{\frac{-1}{(x-1)(2-x)}}dx\left(\int\limits_{1}^{2} e^{\frac{-1}{(x-1)(2-x)}}dx\right)^{-1} & \text{при } 1\leqslant|x|\leqslant 2, \\ 1 & \text{при } |x|\leqslant 1. \end{cases}$$

$$a_1(x,\ y)=\left(\frac{\sin(2e^{1/x}y)}{x^3e^{1/x}}-\frac{y}{x^2}\right)\psi(e^{1/x}y),\quad b_1(x,y)=-\frac{2\sin^2(e^{1/x}y)}{x^3e^{1/x}}\psi(e^{1/x}y),$$

$$a_2(x,\ y)=\frac{2\cos^2(e^{1/x}y)}{x^3e^{1/x}}\psi(e^{1/x}y),\quad b_2(x,\ y)=-\left(\frac{\sin(2e^{1/x}y)}{x^3e^{1/x}}+\frac{y}{x^2}\right)\psi(e^{1/x}y),$$

$$u^*(x,\ y)=e^{-1/x^2}\sin(e^{1/x}y)\varphi(e^{1/x}y),$$

$$v^*(x,\ y)=e^{-1/x^2}\cos(e^{1/x}y)\varphi(e^{1/x}y).$$

Легко проверить непосредственно, что как уравнения (3), так и все сформулированные выше свойства a_1, b_1, a_2, b_2, u^*, v^* будут выполнены.

Замечание. Таким образом, из (1) не следует $\sum\limits_{1}^{k}|u_j|\equiv 0$ в некоторой окрестности M, даже если C не постоянно, а имеет вид Kx_1^q, где $K>0$ и $q\geqslant 0$ — любые числа. При помощи небольшого усложнения примера легко показать, что в классе функций, описанном в утверждении b), тождество $\sum\limits_{1}^{k}|u_j|\equiv 0$ не следует из (1), даже если C имеет вид $f(x_1)$, где f имеет производные всех порядков и монотонно возрастает при $x_1\geqslant 0$, $f(0)=0$, а в остальном f произвольна. Действительно, для этого достаточно положить, например,

$$\alpha(x)=\left(\int\limits_0^x f(x)\,dx\right)^2,\quad a_1(x,\ y)=\left(\alpha'(x)\ln\frac{1}{\alpha(x)}\sin\frac{2y}{\alpha(x)}-\frac{y\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)\psi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right),$$

$$b_1(x,\ y)=-2\alpha'(x)\ln\frac{1}{\alpha(x)}\sin^2\frac{y}{\alpha(x)}\psi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right),$$

$$a_2(x,\ y)=2\alpha'(x)\ln\frac{1}{\alpha(x)}\cos^2\frac{y}{\alpha(x)}\psi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right),$$

$$b_2(x,\ y)=-\left(\alpha'(x)\ln\frac{1}{\alpha(x)}\sin\frac{2y}{\alpha(x)}+\frac{y\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)\psi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right),$$

$$u^*(x,\ y)=e^{-\ln^2\alpha(x)}\sin\frac{y}{\alpha(x)}\varphi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right),\quad v^*(x,\ y)=e^{-\ln^2\alpha(x)}\cos\frac{y}{\alpha(x)}\varphi\left(\frac{y}{\alpha(x)}\right).$$

Поэтому единственности решения систем (2) нельзя добиться только за счет указания порядка убывания коэффициентов и решения при $x_1\to 0$, если этот порядок убывания имеет вид, описанный в настоящем замечании.

Поступило
8 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Haar, C. R., **187**, 1, 23 (1928). [2] A. Haar, Atti Cong. Int. Bologna, **3**, Sz I^c, 5 (1928). [3] A. Haar, Acta L. a. S. R. U. Hung. (Szeged), **4**, 103 (1928—29). [4] А. Мышкис, Усп. мат. наук (1947).