Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. А. МИНДЛИН

ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 III 1947)

В [1] мы дали общее решение волнового уравнения в пространстве 2 и 3 измерений, представляющее собой обобщение решения, данного Лембом [2] и Леви-Чивита [3] для случая радиальных колебаний.

В настоящей работе дается общее представление решения волнового уравнения для случая пространства $n+2$ измерений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+2}^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

представляющее совокупность сходящихся и расходящихся волн.

Интеграл волнового уравнения (1), представляющий обобщение решения Лемба и Леви-Чивита, имеет вид:

$$u=v,(r,t)\,Y_s(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\varphi), \tag{2}$$

$$v(r,t)=\int_0^\infty\left[A_{s,n}^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cos h\xi\right)+A_{s,n}^{(2)}\left(t+\frac{r}{a}\cos h\xi\right)\right]\sin h^n\xi\, C_s^n(\cos h\xi)\,d\xi.$$

Сферические координаты $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\varphi)$ точки в пространстве $n+2$ измерений определяются формулами:

$$x_1=r\cos\theta_1,\quad x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\ldots,\quad x_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_n,$$
$$x_{n+1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_n\cos\varphi,\quad x_{n+2}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_n\sin\varphi.$$

Функция $Y_s(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\varphi)$ — гиперсферическая функция степени s: $C_s^n(z)$ — полином Якоби — Гегенбауэра, представимый формулой

$$C_s^n(z)=\frac{1}{(2s+n-1)!!}(z^2-1)^{\frac{1-n}{2}}\frac{d^s}{dz^s}\left[(z^2-1)^{s+\frac{n-1}{2}}\right]. \tag{2*}$$

Функция $v(r,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{n+1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{s(s+n)}{r^2}v=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Выражению $v,(r,t)$ можно также придать вид:

$$v(r,t)=\int_0^\infty\left[A_{s,n}^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}z\right)+A_{s,n}^{(2)}\left(t+\frac{r}{a}z\right)\right](z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}C_s^n(z)\,dz. \tag{4}$$

Докажем, что первое слагаемое равенства (4)

$$v_{s,n}^{(1)}(r,t)=\int_1^\infty A_{s,n}^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}z\right)(z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}C_s^n(z)\,dz, \tag{5}$$

представляющее собой расходящуюся волну, действительно удовлетворяет уравнению (3). Предполагается, конечно, что функция $A^{(1)}_{s.\,n}(z)$ должна быть такой, чтобы интеграл формулы (5) сходился. Достаточным (но не существенным) условием для этого является

$$\lim_{z\to-\infty}|z|^{s+n+\varepsilon}A^{(1)}_{s,\,n}(z)=0, \tag{6}$$

где ε — любая положительная величина. Пусть функция $A^{(1)}_{s.\,n}(z)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно, удовлетворяющие условию

$$\lim_{z\to-\infty}|z|^{s+n+1+\varepsilon}A^{(1)\prime}_{s,\,n}(z)=0,\qquad \lim_{z\to-\infty}|z|^{s+n+2+\varepsilon}A^{(1)\prime\prime}_{s,\,n}(z)=0. \tag{7}$$

Тогда, подставляя выражение (5) в уравнение (3), имеем

$$\begin{aligned} a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{n+1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{s(s+n)}{r^2}v\right)-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}= \\ =\int\limits_1^\infty\Big[(z^2-1)A^{(1)\prime\prime}_s\left(t-\frac{r}{a}z\right)-\frac{(n+1)\,az}{r}A^{(1)\prime}_{s,\,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)- \\ -\frac{s(s+n)\,a^2}{r^2}A^{(1)}_{s,\,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)\Big](z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}C^n_s(z)\,dz= \\ =-\int\limits_1^\infty\left\{\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[(z^2-1)^{\frac{n+1}{2}}A^{(1)\prime}_{s,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)\right]+\right. \\ \left.+\frac{s(s+n)\,a^2}{r^2}(z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}A^{(1)}_{s,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)\right\}C^n_s(z)\,dz= \\ =-\left\{\frac{a}{r}\left[(z^2-1)^{\frac{n+1}{2}}A^{(1)}_{s,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)C^n_s(z)\right]_{z=1}^{z=\infty}+\right. \\ +\frac{a^2}{r^2}\left[(z^2-1)^{\frac{n+1}{2}}A^{(1)}_{s,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)C^{n\prime}_s(z)\right]_{z=1}^{\infty}+ \\ +\frac{a^2}{r^2}\int\limits_1^\infty A^{(1)}_{s,n}\left(t-\frac{r}{a}z\right)\left\{\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)^{\frac{n+1}{2}}C^{n\prime}_s(z)\right]-\right. \\ \left.\left.-s(s+n)(z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}C^n_s(z)\right\}dz\right\}=0 \end{aligned} \tag{8}$$

в силу условий (6), (7) и дифференциального уравнения для полиномов Якоби — Гегенбауэра.

Условие (6), очевидно, будет удовлетворено, если $A^{(1)}_{s.n}(z)$ обращается в нуль при отрицательных значениях z, превосходящих некоторый предел. Аналогичное доказательство применимо и ко второму слагаемому равенства (4) при условиях, аналогичных (6), (7).

Докажем, что всякое решение $u\,(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)$ уравнения (1), обращающееся в 0 на бесконечности, может быть представлено в виде

$$u=\sum_{s=0}^\infty\int\limits_0^\infty Y_s(r\cos h\xi, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)\sin h^n\xi\, C^n_s(\cos h\xi)\,d\xi, \tag{9}$$

где, как известно [4],

$$Y_s(r\cos h\xi, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)= \tag{10}$$

$$= A_{s, p_1, p_2, \ldots, p_n}(r\cos h\xi, t)\, P^{(n)}_{s, p_1}(\cos\theta_1)\, P^{(n-1)}_{p_1, p_2}(\cos\theta_2)\ldots$$

$$\ldots P^{(1)}_{p_{n-1}, p_n}(\cos\theta_n)\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} p_n\varphi .$$

$P^{(m)}_{p,q}(x) = (1-x^2)^{q/2}\dfrac{d^q}{dx^q}v^m_p(x)$ (q целое $\leqslant p$), где $v^m_p(x)$ есть полином*, который для целых значений p определяется как коэффициент при h^p в разложении $(1-2h\xi+h^2)^{-m/2}$ по возрастающим степеням h. Целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ должны удовлетворять условиям $s \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{n-1} \geqslant p_n \geqslant 0$. Коэффициенты $A_{s, p_1, \ldots p_n}(z,t)$ у линейно независимых гиперсферических функций (10) степени s, число которых $N = \dfrac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}(2s+n)$, удовлетворяют уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 A_{s, p_1, \ldots, p_n}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 A_{s, p_1, \ldots, p_n}(z,t)}{\partial t^2}. \qquad (11)$$

Характер обращения функций $u(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)$ в нуль на бесконечности мы выясним в дальнейшем.

Для доказательства нашего утверждения разложим функцию $u(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)$ в ряд по гиперсферическим функциям; имеем

$$u(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} Y_s(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi), \qquad (12)$$

где $Y_s(r, t, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi) = a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)\, P^{(n)}_{s, p_1}(\cos\theta_1)\, P^{(n-1)}_{p_1, p_2}(\cos\theta_2)\ldots$

$$\ldots P^{(1)}_{p_{n-1}, p_n}(\cos\theta_n)\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} p_n\varphi . \qquad (13)$$

Подставляя в формулу (9) вместо u его значение, определяемое выражениями (12), (13), и приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых гиперсферических функциях, получаем интегральное уравнение для определения искомых функций $A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)$:

$$a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t) = \int_0^{\infty} A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r\cos h\xi, t)\sin h^n\xi\, C^n_s(\cos h\xi)\, d\xi. \quad (14)$$

Пусть функция $a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)$ имеет непрерывные частные производные по r до $[n/2]+1$ порядка включительно, при $0 < r < \infty$ удовлетворяющие условиям

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\varepsilon+l}\,\frac{\partial^l a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)}{\partial r^l} = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad \left(l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]+1\right); \qquad (15)$$

тогда интегральное уравнение (14) имеет непрерывное решение в указанном интервале, и если $\dfrac{\partial^{[n/2]+2} a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)}{\partial r^{[n/2]+2}}$ непрерывно, то $\dfrac{\partial A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)}{\partial r}$ существует и непрерывно, причем такое решение

---

* Полином $C^n_s(x)$ (2*) отличается от полинома $v^m_p(x)$ постоянным множителем.

единственно при условии, что $\lim\limits_{r \to \infty} r^{n+\varepsilon} A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t) = 0$.

$A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)$ определяется следующей формулой при n четном:

$$A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{\pi} \int\limits_r^\infty \left\{ \frac{\partial^{\frac{n}{2}+1}}{(\lambda \partial \lambda)^{\frac{n}{2}+1}} \left[\lambda^{s+n} a_{s, p_1, \ldots, p_n}(\lambda, t) \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{T_{s-1}(r/\lambda)}{\lambda^{s-2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - r^2}}, \tag{16}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева. Формула (16) будет справедлива также и при $s=0$ при предположении, что $T_{-1}(x) = T_1(x)$.

При нечетном n решение интегрального уравнения (14) имеет вид:

$$A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{r^{s-1}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{(r \partial r)^{\frac{n+1}{2}}} \left[r^{s+n} a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t) \right] +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_r^\infty \left\{ \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{(\lambda \partial \lambda)^{\frac{n+1}{2}}} \left[\lambda^{s+n} a_{s, p_1, \ldots, p_n}(\lambda, t) \right] \right\} \frac{P'_{s-1}(r/\lambda)}{\lambda^s} d\lambda, \tag{17}$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра. При $s=0$ предполагаем, что $P'_{-1}(x) = 0$. Символ $d^m/(\lambda\, d\lambda)^m$ обозначает операцию дифференцирования и последовательного деления на λ, проделываемую m раз.

Находя частные производные второго порядка по r и по t от обеих частей выражений (16), (17), мы убеждаемся, что функции $A_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)$ действительно удовлетворяют уравнению колебания струны при условии, что функция $a_{s, p_1, \ldots, p_n}(r, t)$ удовлетворяет уравнению (3). Из формул (16) и (17) мы видим, что характер обращения в нуль на бесконечности искомых функций $A_{s, p_1, \ldots, p_n}$ таков же, как и заданных функций. Таким образом, нами доказана представимость всякого решения уравнения (1), определяемого равенствами (12), (13), коэффициенты которых удовлетворяют условию (15), в виде равномерно сходящегося ряда (9). При $s=0$ формула (5) решает задачу излучения ([5]) для волнового уравнения (1).

Изложенное доказательство представления решения волнового уравнения (1) позволяет получить решение задачи Коши, а также смешанной задачи для волнового уравнения (1) в случае гиперсферы (внешняя и внутренняя задачи), подобно тому как это нами сделано ([1]) для задачи Коши и для внешней задачи для случая круга и сферы.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
23 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Миндлин, ДАН, **25**, № 4 (1939); **26**, № 6 (1940). [2] H. Lamb, Proc. Lond. Mathem. Soc., (1) **35**, 141 (1902). [3] T. Levi-Civita, Nuovo Cimento, 14 (1897). [4] P. Appel, J. Kampé de Fériet, Fonctions hypersphériques, Paris, 1926. [5] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, II, гл. VI, § 5, 1945.