Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. С. ЛИВШИЦ

К ТЕОРИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С РАВНЫМИ ДЕФЕКТНЫМИ ЧИСЛАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1947)

Настоящая заметка посвящена обобщению результатов, полученных нами ранее ([1]) для операторов с индексом дефекта (1,1), на случай оператора с индексом дефекта (m, m) $(m \leqslant \infty)$*. Это дает возможность построить теорию элементарных делителей для некоторых классов неунитарных операторов и изучить их инвариантные подпространства, отвечающие существенно особым точкам резольвенты.

Пусть V — изометрический оператор с областью определения G и областью изменения G', где G и G' — подпространства гильбертова пространства H. Размерности m и m' ортогональных дополнений $D = H \ominus G$ и $D' = H \ominus G'$ называются индексами дефекта оператора V. Мы в дальнейшем предполагаем, что $m = m'$ $(m \leqslant \infty)$.

Нетрудно видеть, что оператор $V_\zeta = (V - \zeta)(1 - \overline{\zeta} V)^{-1}$ $(|\zeta| \neq 1)$ есть изометрический оператор с индексом дефекта (m, m). Ортогональные дополнения D_ζ и D'_ζ области определения G_ζ и области изменения $G_{\zeta'}$ оператора V_ζ называются дефектными подпространствами оператора V.

Пусть g_k и g'_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — ортонормированные базисы подпространств D и D', а $g_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — некоторый базис (не обязательно ортонормированный) подпространства D_ζ.

Каждому изометрическому оператору V мы приводим в соответствие матрицу-функцию

$$w(\zeta) = [B(\zeta)]^{-1} A(\zeta),$$

где элементы $a_{ik}(\zeta)$ и $b_{ik}(\zeta)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ матриц $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ определяется из соотношений:

$$\begin{aligned} a_{ik}(\zeta) &= \zeta (g_k(\zeta), g'_j), \\ b_{ik}(\zeta) &= (g_k(\zeta), g_j), \end{aligned} \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Нетрудно видеть, что матрица $w(\zeta)$ не зависит от выбора базиса $g_k(\zeta)$ в D_ζ и определяется только дефектными подпространствами D_ζ, D' оператора V.

Матрицу-функцию $w(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ мы будем называть **характеристической функцией оператора** V.

---

* Настоящая заметка имеет много точек соприкосновения с результатами фундаментальных работ М. Г. Крейна по теории эрмитовых операторов ([2]), см. также ([3], [4]).

Без ограничения общности можно считать, что оператор V не является унитарным ни в каком подпространстве гильбертова пространства H. Такой оператор V называется простым.

Теорема 1. *Для того чтобы заданная матрица $w(\zeta)$ $(|\zeta|<1)$ являлась характеристической функцией некоторого изометрического оператора, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *Элементы $w_{kj}(\zeta)$ $(k,\ j=1, 2, \ldots, m)$ матрицы $w(\zeta)$ суть регулярные функции от ζ $(|\zeta|<1)$.*

2. *Линейный оператор, отвечающий матрице $w(\zeta)$ $(|\zeta|<1)$, имеет норму, не превосходящую единицы.*

3. $w(0)=0$.

Теорема 2. *Для того чтобы простые изометрические операторы V_1 и V_2 были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ были связаны соотношением*

$$w_1(\zeta)=u' w_2(\zeta)\, u'',$$

где u', u'' — постоянные унитарные матрицы.

Определение. Линейный оператор T называется квази-унитарным оператором m-го порядка, если:

1) T является расширением некоторого изометрического оператора V с индексом дефекта (m, m);

2) оператор T отображает дефектное подпространство D в дефектное подпространство D'.

При заданном операторе V оператор T вполне определяется соотношениями

$$Tg_i=\sum_{k=1}^{m}\tau_{ik}g_k' \qquad (i=1,\ 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где g_i, g_i' $(i=1, 2, \ldots, m)$ — ортонормированные базисы подпространств D и D', соответственно.

Матрицу $w_T(\zeta)=(1-w(\zeta)\tau^*)^{-1}(\tau-w(\zeta))$, где $w(\zeta)$ — характеристическая функция оператора V, а τ — матрица, элементы τ_{ik} которой те же, что и в соотношениях (1), мы будем называть характеристической функцией оператора T.

Пусть, в частности, T — квази-унитарный оператор первого порядка и

$$w_T(\zeta)=\frac{\tau-w(\zeta)}{1-w(\zeta)\,\overline{\tau}}$$

его характеристическая функция. Без ограничения общности можно принять $|\tau|<1$. Так как $w_T(\zeta)$ есть регулярная функция, отображающая единичный круг на свою часть, то $w_T(\zeta)$ допускает представление в виде

$$w_T(\zeta)=e^{\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\sigma(\theta)}\prod\frac{\zeta_k-\zeta}{1-\zeta\overline{\zeta}_k}\,\frac{|\zeta_k|}{\zeta} \qquad (|\zeta_k|<1),$$

где $\sigma(\theta)$ — неубывающая функция. Точки роста функции $\sigma(\theta)$, так же как и точки сгущения корней ζ_k, суть существенно особые точки, а корни ζ_k суть полюса резольвенты оператора T.

Мы будем говорить, что функция $w_1(\zeta)$ есть делитель функции $w_T(\zeta)$, если $w_T(\zeta)=w_1(\zeta)\,w_2(\zeta)$, где $w_1(\zeta)$, $w_2(\zeta)$ — функции, конформно отображающие единичный круг на свою часть.

Теорема 3. *Каждому делителю $w_1(\zeta)$ функции $w_T(\zeta)$ отвечает определенное инвариантное подпространство оператора T. В этом подпространстве оператор T является квази-унитарным оператором первого порядка, причем его характеристическая функция равна $w_1(\zeta)$. Обратно, если H_1 — некоторое инвариантное подпространство оператора T и $w_1(\zeta)$ — характеристическая функция оператора T в подпространстве H_1, то $w_1(\zeta)$ является делителем характеристической функции $w_T(\zeta)$ оператора T во всем пространстве H.*

Доказательство этой теоремы основано на понятии сцепления изометрических операторов.

Определение. Пусть V_1, V_2 — изометрические операторы с индексом дефекта (m, m), действующие во взаимно простых пространствах H_1, H_2, ортогональная сумма которых совпадает с пространством H. Пусть G_1, G_2 — области определения, а G_1', G_2' — области изменения операторов V_1, V_2.

Изометрический оператор V с индексом дефекта (m, m), действующий в пространстве H, называется сцеплением операторов V_1, V_2, если оператор V является расширением каждого из операторов V_1, V_2.

Сцепление мы будем называть крестообразным сцеплением оператора V_1 с оператором V_2, если оператор V определен на всем дефектном подпространстве $D_1=H_1\ominus G_1$ оператора V_1 и отображает это подпространство на дефектные подпространства $D_2'=H_2\ominus G_2'$ оператора V_2.

Можно показать, что в случае крестообразного сцепления характеристическая функция $w(\zeta)$ сцепления V_1 с V_2 равна произведению $w_2(\zeta)\,w_1(\zeta)$, где $w_1(\zeta)$, $w_2(\zeta)$ — характеристические функции операторов V_1, V_2, соответственно*.

Заметим, что оператор вида $U+F$, где U — унитарный оператор, а F — конечномерный оператор, является квази-унитарным оператором конечного порядка.

Поступило
1 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, Матем. сб., **19** (61) : 2 (1946). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **48**, № 8 (1945); **44**, № 4 (1944); **44**, № 5 (1944); **44**, № 6 (1944); **52**, № 8 (1946) [3] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, 285 (1943). [4] H. L. Hamburger, Quart. Journ. Math. (Oxford Ser.), **13**, 117 (1942); Ann. Math., **45**, 59 (1944); Am. J. Math., **46**, 4 (1944); Proc. Nation. Ac. Sci., **31**, No. 7, 185 (1945).

---

* М. Г. Крейн сообщил мне, что этот результат был получен также И. М. Гельфандом.