

С. С. КОВНЕР и Д. К. ЖАК

**ВЫЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРОВ ЛИБМАННА  
И ГЕРШГОРИНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К МАШИННОМУ  
ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IV 1947)

1. Задача приближенного интегрирования уравнения Лапласа с помощью метода сеток разработана Н. Liebmann'ом<sup>(1)</sup>. С. А. Гершгорин<sup>(2-4)</sup>, Ш. Е. Микеладзе<sup>(5)</sup> и многие другие советские ученые внесли в этот метод ряд весьма существенных дополнений.

При производстве массовых вычислений, которые встретились в процессе решения проблем, связанных с распространением тепла в многослойной среде<sup>(6-8)</sup>, нам пришлось перейти от вычислений на ручных и электрических арифмометрах к вычислениям на счетно-аналитических машинах. И. Я. Акушский детально разработал этот вопрос в<sup>(9)</sup>, а Л. А. Люстерник и А. М. Прохоров в<sup>(10)</sup>.

Наши первые опыты решения смешанной задачи Дирихле — Нейманна по общеизвестным формулам на счетно-аналитических машинах показали, что можно без труда увеличить скорость расчета приблизительно в 5—6 раз по сравнению с расчетом вручную.

Авторы пришли к мысли, что на счетно-аналитических машинах можно получить больший выигрыш во времени, если находить непосредственно не первую, а некоторую  $n$ -ю итерацию либманновского процесса.

2. Имеем для первого приближения:

$$u_{i,k}^{(1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}]. \quad (1)$$

Заменяя в правой части нулевые приближения найденными из (1) первыми приближениями, получаем второе

$$\begin{aligned} u_{i,k}^{(2)} &= \frac{1}{4} [u_{i+1,k}^{(1)} + u_{i,k+1}^{(1)} + u_{i-1,k}^{(1)} + u_{i,k-1}^{(1)}] = \\ &= \frac{1}{4^2} [4u_{i,k} + 2u_{i+1,k+1} + 2u_{i-1,k+1} + 2u_{i-1,k-1} + 2u_{i+1,k-1} + \\ &\quad + u_{i+2,k} + u_{i,k+2} + u_{i-2,k} + u_{i,k-2}] \end{aligned} \quad (2)$$

и т. д.

Общая формула получается из следующих геометрических соображений: первая итерация получена сложением значений нулевого приближения в 4 ближайших к  $(i, k)$  точках с последующим делением на 4.

Каждое значение фигурировало в сумме один раз, как это показано на рис. 1, *a*; мы скажем, что каждая из точек фигурирует в формуле (1) с весом 1. Веса точек формулы (2) показаны на рис. 1, *b*.

Очевидно, что  $u$   $\dagger$  1-й степени оператора соответствует аналогич-

ная фигура, полученная построением около каждой из 4 ближайших к  $(i, k)$  точек фигуры, соответствующей  $n$ -й степени, и сложением всех весов, наложенных на каждую точку. Таким образом, веса точек

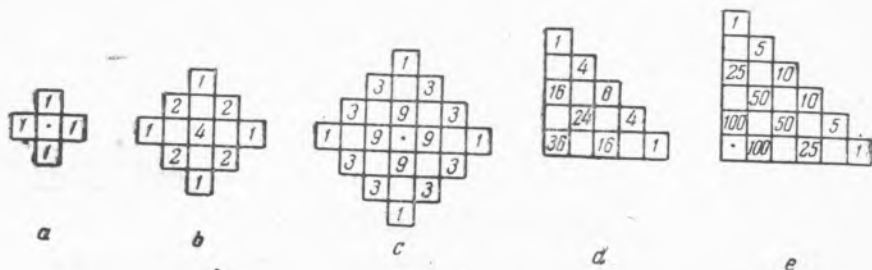


Рис. 1

степеней оператора Либманна находятся тем же итерационным либманновским процессом, что и значения последовательных приближений. Формула, дающая непосредственно  $n$ -ю итерацию, получает вид:

$$u_{i,k}^{(n)} = \frac{1}{4^n} \sum_{p=0}^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \binom{n}{p} u_{m,p} \quad (3)$$

где  $(m, p)$  суть координаты точек в системе, начало которой лежит в вершине квадрата, охватывающего все точки, фигурирующие

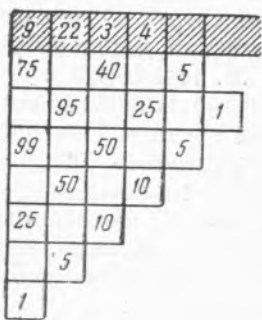
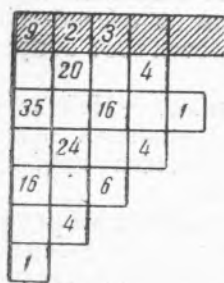


Рис. 2

в операторе, а за единицу принята длина диагонали минимального квадрата сетки. На рис. 1, *b, c, d, e* представлены веса точек, соответствующие 2-му, 3-му, 4-му и 5-му шагам.

3. В случае задачи Дирихле значение в точке, лежащей на границе, не будет заменяться средним, а войдет в дальнейшие итерации непосредственно. Поэтому вес граничной точки для каждого последующего шага итерации равен сумме

ее собственного веса и веса ближайшей внутренней точки в предыдущем шаге, и т. д.

На рис. 2, *d* и *e* даны значения весов 4-й и 5-й степени оператора в случае прямолинейной границы для точки, лежащей на расстоянии 2 клеток от нее. На рисунке изображена четверть фигуры.

Вычисление степеней оператора для любой формы границы односвязной или многосвязной двумерной области ведется по тому же правилу и затруднений не представляет.

В работах <sup>(6)</sup> и <sup>(8)</sup> решались задачи распространения тепла в многослойной среде при условиях на внутренних границах между  $j$ -м и  $j+1$ -м слоем:

$$u_{i,k} = \alpha u_{i,k-1}^{(j)} + \beta u_{i,k+1}^{(j+1)} \quad (\alpha + \beta = 1).$$

Веса точек оператора  $n+1$ -й степени, лежащих на внутренней горизонтальной границе, вычисляются сложением весов двух соседних сверху и снизу точек оператора  $n$ -й степени, а веса точек, примыкающих к границе, равны сумме весов 4 соседних, причем вес граничной

очки по одну сторону границы множится при этом на  $\alpha$ , а по другую — на  $\beta$  (рис. 3, *d* и *e*).

Все рассуждения остаются неизменными и при решении уравнения Лапласа в пространстве. Коэффициенты степеней оператора Либманна будут вычисляться тем же либманновским процессом в трех измерениях.

4. Процесс Либманна обладает свойством автоматической регулируемости: если в значение  $u_{i,k}$  вкралась ошибка  $\varepsilon_{i,k}$ , то при дальнейших итерациях она стремится к нулю. Значение  $\varepsilon_{i,k}$  через  $n$  шагов соответствует решению задачи Дирихле для той же области, если граничные значения равны нулю, в точке  $(i,k)$  нулевое приближение равно  $\varepsilon_{i,k}$ , а в остальных внутренних точках — нулю.

Следовательно, через  $n$  шагов значение погрешности в точке  $(i,k)$  для нечетного  $n$  равно нулю, а для четного  $n=2q$ .

$$\varepsilon_{i,k}^{(n)} = \frac{1}{4^{2q}} \left(\frac{2q}{q}\right)^2 \varepsilon_{i,k} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \dots \left(\frac{2q-1}{2q}\right)^2 \varepsilon_{i,k}. \quad (4)$$

Таким образом, для любого  $n$   $\varepsilon_{i,k}^{(n)} = [P_n(0)]^2$ , где  $P_n(x)$  есть полином Лежандра 1-го рода <sup>(11)</sup>.

Отсюда видно, что автоматическое регулирование не является быстрым процессом: нужно сделать  $n=64$  итерации, чтобы  $\varepsilon_{i,k}^{(n)}$  достигло  $0,01\varepsilon_{i,k}$ .

Приведенная оценка является максимальной, так как не учитывает влияния граничных точек, которое ускорит затухание.

5. Прделанные управлением „Союзмашучет“ Центрального статистического управления Госплана СССР экспериментальные просчеты показали, что современные конструкции счетно-аналитических машин позволяют выполнить 5-шаговый расчет ( $n=5$ ) так, что затраты времени на него не превышают затрат времени на одношаговый расчет, а количество перфокарт при 100 итерациях, выполненных 5-шаговым расчетом, равно числу перфокарт, необходимых для 60 итераций, выполненных методом одношагового расчета. 5-шаговый расчет позволяет резко — в 5 раз — сократить время, необходимое на расчеты, не увеличивая, а сокращая объем работ.

Схематический процесс работы при 5-шаговом расчете таков:

1) На каждую точку пробивается 36 перфокарт, так как новое значение каждой точки образуется из значений 36 окружающих точек.

2) На каждой перфокарте пробиваются показатели: а) номер точки контура, которой соответствует перфокарта (основной); б) в состав какой точки включается данная точка-перфокарта при расчете нового значения; в) коэффициент, с которым она входит в расчет данной точки, и порядковый условный номер этого коэффициента; г) исходное значение точки контура, которой соответствует данная перфокарта.

3) На сортировальной машине, группирующей перфокарты по одной колонке, производится подбор перфокарт по показателю б, т. е. объединяются все перфокарты точек, входящих в расчет нового значения каждой данной точки контура.

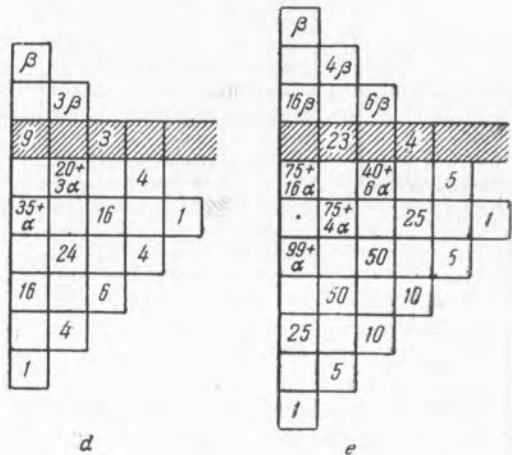


Рис. 3

4) Подобранные перфокарты пропускаются через табулятор с приспособлением для умножения. При этом суммируются значения точек, имеющих одинаковый коэффициент взвешивания, и сумма этих значений умножается на него. Полученные произведения всех 36 составляющих суммируются, и только эта сумма произведений печатается.

5) После этого перфокарты вновь перегруппировываются по показателю  $a$ , и на каждой из 36 перфокарт основной точки пробивается новое значение в этой основной точке.

6) Затем перфокарты снова перегруппировываются по показателю  $b$  — и заново начинается процесс 5-шагового расчета.

7) Время, необходимое для расчета нового значения одной точки при 36 составляющих и 7 разных коэффициентах (см. п. 4), проверено экспериментально и составляет 1 мин. 2 сек.

6. Вместо оператора Либманна (1), погрешность которого пропорциональна  $h$ , можно ввести оператор Гершгорина (2, 5)

$$u_0 = \frac{1}{20} [4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8)], \quad (5)$$

погрешность которого пропорциональна  $h^2$ .

1	4	1
4		4
1	4	1

$a$

2424	1770	720	165	20	1
12160	11080	6400	2020	320	20
44120	33490	21520	3305	2020	165
79360	81440	46080	21520	6400	720
152960	104420	61440	33490	11080	1770
134400	150280	79360	44120	12160	2424

$e$

Рис. 4

При более быстрой сходимости оператор Гершгорина требует введения в расчет большего числа коэффициентов: в процесс Либманна для подсчета  $n$ -го шага при  $n=2q$  или  $n=2q+1$  нужно вводить  $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$  различных коэффициентов, а в процесс Гершгорина  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ , и вопрос об оптимальном применении оператора Гершгорина требует опытного изучения.

7. Метод приближенного интегрирования с помощью степеней операторов Либманна и Гершгорина создает новую базу для практического решения ряда основных задач математической физики. Длительность процесса, достигавшая 3—4 месяцев, уже приемом, изложенным в § 5 настоящей работы, может быть сведена к 2—3 неделям. Дальнейшая рационализация возможна как в направлении повышения степени вычисляемого оператора, так и усовершенствования техники расчета.

Поступило  
4 IV 1947

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Liebmann, Sitzungsber. Bayer. Ak. Wiss., München, 385 (1918).  
<sup>2</sup> С. А. Гершгорин, Изв. Ленингр. политехн. ин-та (1927). <sup>3</sup> Он же, Журн. прикл. физ., 4 (1929). <sup>4</sup> Он же, ЗАММ, 10 (1930). <sup>5</sup> Ш. Е. Микеладзе, Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, изд. АН СССР, 1936. <sup>6</sup> С. С. Ковнер, ДАН, 32, № 6, 398 (1941). <sup>7</sup> Он же, ДАН, 37, № 1, 22 (1942). <sup>8</sup> Он же, ДАН, 56, № 5 (1947). <sup>9</sup> И. Я. Акушский, Диссертация, Матем. ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова, 1945; ДАН, 52, № 5, 379 (1946); ДАН, 52, № 6, 475 (1946). <sup>10</sup> Л. А. Люстерник и А. М. Прохоров, ДАН, 55, № 7, 579 (1947). <sup>11</sup> E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, N. Y., 1945, S. 114.