

## Conditions of reflectionless extinguish of electromagnetic radiation in the layer of absorbing dielectric

R. M. Kasimov, E. R. Kasimov

Institute of Chemistry Problems and Institute Physics of Azerbaijan  
Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan

*Conditions of reflectionless extinguish of electromagnetic wave while its going through a flat absorbing layer of dielectric located on the border of two non-absorbing media have been found. Dependence of these conditions on thickness of absorbing layer, optical properties of applying media and substance of absorbing layer have been investigated. Energy balance between the absorbed in the layer of dielectric and moved through it electromagnetic radiation in conditions of reflection wave absence has been examined.*

УДК 548.232.4

## Тепловая градиентная катастрофа и рост двумерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве

О. Н. Шабловский

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
г. Гомель, Белоруссия

*Проблема роста дендрита в переохлажденном расплаве изучается с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса. Представлены динамические условия совместности на трехмерной фазовой границе кристаллизации однокомпонентной системы. Градиентная катастрофа теплового поля является предвестником зарождения боковой ветви дендрита. Указаны три типа градиентных катастроф на двумерной линии роста (плоской либо осесимметричной). Дана теплофизическая интерпретация результатов экспериментов по дендритной кристаллизации.*

Современное состояние исследований роста иглообразного дендрита в переохлажденном расплаве и роста кристалла из пересыщенного раствора представлено в работах [1—5]. Анализ тепло- и массопереноса в этих задачах обычно основан на классических законах Фурье и Фика. По мере увеличения переохлаждения расплава (пересыщения раствора) возрастает роль неравновесности в явлениях переноса. Учет эффекта диффузионной релаксации в задачах дендритной кристаллизации металлов выполнен в работе [6].

Важным аспектом проблемы роста является дендритное ветвление. В данной работе рассматривается рост кристалла из однокомпонентного переохлажденного расплава с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса. Цели исследования — вычислить касательные и нормальные производные

температуры и теплового потока на двумерной линии роста; интерпретировать градиентную катастрофу как предвестник появления боковой ветви дендрита и указать основные типы катастроф; определить необходимые условия появления колебаний скорости вершины дендрита.

### Теоретический анализ

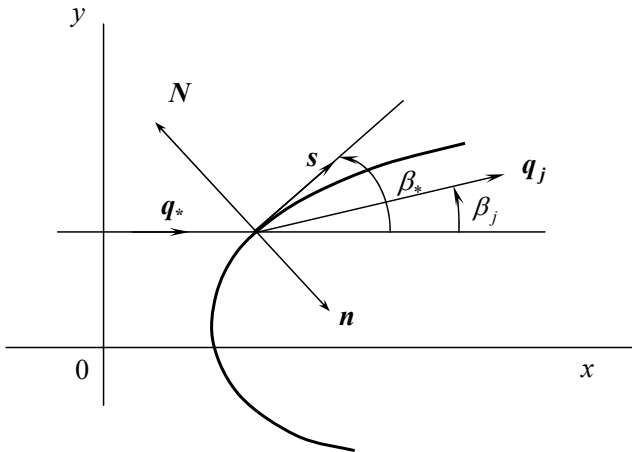
#### Динамические условия совместности

Начнем с обсуждения общих трехмерных свойств поверхности роста. Уравнение фазовой границы кристаллизации возьмем в виде

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  — прямоугольные Декартовы координаты;  
 $t$  — время.

Тепловое поле расплава одномерное:  $T = T_*(x, t)$ ,  $q_1 = q_*(x, t)$ . Координатная ось  $Ox$  направлена вдоль вектора теплового потока  $q^*$  (рисунок). Построим ортогональный базис  $s, n, b$ , соответствующий касательной, главной нормали и бинормали к поверхности роста (1). Единичный вектор главной нормали равен  $n = G/G, G = \text{grad}f, G = |G|$ .



Основные геометрические параметры фазовой границы кристаллизации

Вектор  $n$  направлен в сторону кристаллической фазы:  $q^* \cdot G \geq 0$ . Единичный вектор касательной  $s$  лежит в плоскости  $(n, q^*)$ . Вектор  $b$  бинормали перпендикулярен плоскости  $(x, y)$  и вместе с  $s, n$  образует правую систему векторов  $s, n, b : b = s \times n$ . Локально-неравновесная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения баланса энергии и уравнения для теплового потока [7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} q = q_v; \tag{2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\lambda}{\gamma} \text{grad} T = -\frac{q}{\gamma}, \tag{3}$$

где  $T$  — температура;  
 $q(q_1, q_2, q_3)$  — вектор удельного теплового потока;  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  
 $c$  — объемная теплоемкость;  
 $\gamma$  — время релаксации теплового потока;  
 $q_v$  — мощность внутренних источников тепла;  
 $u$  — плотность энергии.

Современные методы нелинейного анализа уравнений (2), (3) и некоторые теплофизические аспекты проблемы высокоскоростной

кристаллизации изложены в работе [8]. Для гладких температурных полей дифференциальное уравнение (2) следует из интегрального закона сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(v)} u dv = - \int_{(S)} q_n dS + \int_{(v)} q_v dv,$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $v$ ;  
 $q_n$  — нормальная к  $S$  компонента вектора теплового потока.

Любое решение уравнения (3) удовлетворяет следующему интегральному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(v)} q dv = - \int_{(v)} \frac{q}{\gamma} dv - \int_{(S)} V n dS; \quad u = \int_0^T c(T) dT, \\ V = \int_0^T \frac{\lambda(T)}{c(T)} dT = \int_0^u w^2(u) du, \quad w^2 = \frac{\lambda}{c\gamma}.$$

Следствием этих интегральных законов являются условия динамической совместности на поверхности сильного разрыва (1)

$$N(u_j - u_*) - Q = (q \cdot n)_j - (q \cdot n)_*; \tag{4}$$

$$N[(q \cdot n)_j - (q \cdot n)_*] = V_j - V_*; \tag{5}$$

$$(q \cdot s)_j = (q \cdot s)_*; \quad (q \cdot b)_j = (q \cdot b)_*; \tag{6}$$

$$N = -\frac{1}{G} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad Q = L(N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t}),$$

где  $N = Nn$  — скорость перемещения фазовой границы;

$w$  — скорость распространения тепловых возмущений;

$L$  — теплота фазового перехода единицы объема вещества; индексами  $*, j$  отмечены значения функций по обе стороны сильного разрыва:

$*$  — расплав,

$j$  — твердая фаза;

$u_* = u(T_*)$ ,  $u_j = u(T_j)$  и т. д.

Условие необратимости теплового процесса состоит в том, что на фазовой границе производство энтропии положительное:  $\omega > 0$ . Кроме того, должен выполняться принцип максимальности производства энтропии [9]. Методологические аспекты применения этого принципа в задачах о неравновесной кристаллизации изложены в работе [3]. Учет ограничений на  $\omega$  при теплофизической интерпретации результатов экспериментов по кристаллизации глубоко переохлажденных расплавов выполнен в работе

[10]. Для одномерных процессов динамические условия (4), (5) подробно изучены в работе [8]. Формулам (6) соответствуют нулевые скачки теплового потока в касательном и бинормальном направлениях. Соотношение (4) — это баланс энергии на фазовой границе. В предельном равновесном случае  $\gamma \rightarrow 0$  соотношение (5) дает  $T_j = T_*$ . Чтобы замкнуть систему граничных условий на разрыве (1), возьмем известную кинетическую связь  $N = F(T_e - T_j)$  дающую зависимость скорости роста от переохлаждения на фронте кристаллизации; в линейном приближении (нормальный механизм роста) имеем

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c(1 - \frac{\sigma K}{L}), \quad (7)$$

где  $\mu$  — кинетический коэффициент роста;  
 $T_e$  — температура равновесия между твердой и жидкой фазами;  
 $\sigma$  — поверхностная энергия границы раздела фаз;  
 $T_c$  — равновесная температура кристаллизации;  
 $K$  — средняя кривизна фазовой границы.

Считаем, что  $K > 0$ , если поверхность роста вогнута в сторону кристалла. При решении задачи в общей постановке нужно присоединить к условиям (4)–(7) условия теплообмена системы "расплав — кристалл" с внешней средой. В дальнейшем при изучении поверхности (1) будем пользоваться геометрическими параметрами и координатными линиями, аналогичными тем, что применялись в газодинамической теории ударных волн [11]. Вектор  $q_j$ , очевидно, лежит в плоскости  $(n, q_*)$ . На плоскости  $(s, n)$  расположение векторов  $q_*$ ,  $q_j$  характеризуется углами  $\beta_*$ ,  $\beta_j$ , которые отсчитываются от оси  $OX$  так, как показано на рисунке. Это означает, что  $\beta_j$  — есть угол поворота теплового потока за фазовой границей. Для краткости запишем  $\beta_* \equiv \beta$ . Нетрудно видеть, что справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} b &= \frac{q_* \times n}{q_* \cos \beta} = \frac{q_* \times G}{k_*}; \quad s = \frac{1}{k_* G} [q_* G^2 - (q_* \cdot G)G]; \\ k_* &= q_* G \cos \beta = [q_*^2 G^2 - (q_* \cdot G)^2]^{1/2}; \\ q_* &= q_*(s \cos \beta + n \sin \beta), \quad q_* = |q_*|; \\ \sin \beta &= \frac{q_* \cdot G}{q_* G}. \end{aligned} \quad (8)$$

**Двухмерная нестационарная фазовая граница**

Ось  $OX$  направим вдоль оси симметрии дендрита в сторону твердой фазы (см. рисунок); ось  $OY$  перпендикулярна  $OX$  и вместе с ней образует правую прямоугольную систему координат. Применим уравнения теплопереноса (2), (3), записанные в плоскости  $(x, y)$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{v}{y} q_2 = 0; \quad (9)$$

$$q_1 + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (10)$$

$$q_2 + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (11)$$

где  $q_0 \equiv 0$ ;  
 $c = c(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $\gamma = \gamma(T)$ ;  
 в "плоском" случае имеем  $v = 0$ ,  $y$  — поперечная координата;  
 для осесимметричного процесса  $v = 1$ ,  $y$  — радиальная координата.

В двухмерном случае ("плоском" либо осесимметричном) орты  $n, s$  строим так же, как в трехмерном, меняем только порядок их нумерации. Вектор  $s$  указывает положительное направление отсчета дуговой координаты  $s$  (отсчет идет от вершины дендрита  $y = 0$ ). Преобразование независимых переменных выполняем в два этапа:  $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2) \rightarrow (n, s)$ , где  $\xi_1, \xi_2$  — координатные линии, соответствующие ортам  $n, s$ . Линию фазовой границы постулируем в виде

$$\begin{aligned} f &\equiv x + A(t) - [B(y)]^{p(t)} = 0, \\ t &\geq 0, \quad 0 \leq y \leq y_1 < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $p(t) > 0$ ;  $B'(y) \equiv dB(y)/dy \geq 0$ ;  $B(y) \geq 1$ , причем  $B(y=0) = 1$ ,  $B'(y=0) = 0$ . Например,  $B(y) = 1 + y^{2m}$ ,  $m \geq 1$ . Считаем, что фазовая граница движется справа налево в сторону отрицательных значений  $x$ . Закон движения вершины дендрита имеет вид

$$x_j(t, y=0) \equiv x_0(t) = 1 - A(t), \quad \frac{dx_0}{dt} = -\dot{A}(t) < 0.$$

Здесь и в дальнейшем точка над символом функции означает дифференцирование по времени; штрихом отмечены производные по  $y$ . В частном случае, когда  $p(t) \equiv 1$ , зависимость (12) представляет линию стационарной формы. Из (12) и (8) получаем

$$G = (1 + B_1^2)^{1/2}, \quad B_1 = pB^{p-1}B', \quad \sin \beta = \frac{1}{G},$$

$$\cos \beta = \frac{B_1}{G}. \quad (13)$$

Фазовая граница  $x_j(y, t) = B^p - A$  перемещается со скоростью

$$N = \frac{1}{G}(\dot{p}B^p \ln B - \dot{A}) \quad (14)$$

и обладает средней кривизной  $K = K_1 + K_2$ :

$$K_1 = \frac{B_2}{G^3}, \quad K_2 = \frac{vB_1}{yG},$$

$$B_2 = B_2(y, t) = pB^{p-1}B'' + p(p-1)B^{p-2}(B')^2,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{B_1}{G} \right) = -K_1.$$

Линия (12) совершает плоское движение;  $\dot{A}(t)$  характеризует скорость, отвечающую поступательной компоненте движения фазовой границы;  $\dot{p}(t)$  характеризует угловую скорость касательной к линии роста в каждой ее точке. Вместе с тем  $p(t)$  определяет кривизну на вершине:  $K_0(t) \equiv K(t, y=0) = p(t)B''(y=0) > 0$ . Условие  $N < 0$  (см. рисунок) всегда выполнено для  $\dot{p}(t) < 0$ ; в случае  $\dot{p}(t) > 0$  эта производная не должна быть слишком большой:  $0 < \dot{p}B^p \ln B < \dot{A}$ . Координатные линии  $\xi_1(x, y, t)$ ,  $\xi_2(x, y, t)$ , соответствующие осям  $n, s$ , имеют вид

$$\xi_1 = x + A - B^p, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \xi_1};$$

$$\xi_2 = x + A + \int \frac{dy}{B_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Очевидно, что выполнено равенство  $\text{grad} \xi_1 \cdot \text{grad} \xi_2 = 0$ . Кроме того, имеем  $(q_j)_n = q_j \sin(\beta - \beta_j)$ ,  $(q_j)_s = q_j \cos(\beta - \beta_j)$ ,  $q_j = |q_j|$ , где нижние индексы  $n, s$  относятся к нормальной и касательной компонентам вектора.

Запишем динамические условия совместности (4)—(6) в такой форме:

$$q_{nj} \equiv q_j \sin(\beta - \beta_j) = q_* \sin \beta + Q_1; \quad (15)$$

$$q_{sj} \equiv q_j \cos(\beta - \beta_j) = q_* \cos \beta; \quad (16)$$

$$V_j - V_* = (u_j - u_*)N^2 - NQ; \quad (17)$$

$$Q_1 = N(u_j - u_*) - Q, \quad 0 < T_* < T_j < T_c.$$

Для упрощения записи аналитических преобразований можно взять  $c_*, c_j, \lambda_*, \lambda_j, \gamma_*, \gamma_j$  постоянными: такое допущение не умаляет общности алгоритма, потому что относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву. В этом случае имеем

$$u_j - u_* = c_j T_j - c_* T_* + T_c(c_* - c_j);$$

$$V_j - V_* = \left( \frac{\lambda}{\gamma} \right)_j T_j - \left( \frac{\lambda}{\gamma} \right)_* T_* + T_c \left[ \left( \frac{\lambda}{\gamma} \right)_* - \left( \frac{\lambda}{\gamma} \right)_j \right].$$

Из (15), (16) следует, что

$$\text{tg} \beta_j = \frac{-Q_1 \cos \beta}{q_* + Q_1 \sin \beta}. \quad (18)$$

Отметим, в частности, наиболее простой случай, когда расплав находится в отрелаксировавшем однородном тепловом состоянии:  $q_* \equiv 0, T_* \equiv \text{const}$ . Тогда получаем из (18) равенство  $\text{tg} \beta_j = -\text{ctg} \beta$ , а условие (16) дает  $q_{sj} \equiv 0$ , т. е. тепловой поток в твердой фазе направлен вдоль нормали  $n$ . Работаем с функциями  $T, q_n, q_s$  аргументов  $n, s, t$ :

$$q = q_1 + q_2 = q_s + q_n; \quad q_1 = q_n \sin \beta + q_s \cos \beta;$$

$$q_2 = q_s \sin \beta - q_n \cos \beta.$$

В уравнениях теплопереноса (9)—(11) переход от аргументов  $x, y, t$  к переменным  $n, s, t$  выполняем с помощью операторов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{B_1}{G} \frac{\partial}{\partial s};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{B_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} - B_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_1}{G} \frac{\partial}{\partial n};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \xi_{1t} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \xi_{2t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\xi_{1t}}{G} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{B_1 \xi_{2t}}{G} \frac{\partial}{\partial s},$$

$$t' = t;$$

$$\xi_{1t} \equiv \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \dot{A} - \dot{p}B^p \ln B, \quad \xi_{2t} \equiv \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \dot{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dy}{B_1}.$$

После этих преобразований уравнения (9)—(11) являются по отношению к искомым нормальным производным  $\partial T / \partial n, \partial q_n / \partial n, \partial q_s / \partial n$  системой линейных неоднородных алгебраических уравнений. Ее решение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{R_2 - NR_1}{c(N^2 - w^2)}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial n} = \frac{NR_2 - w^2 R_1}{N^2 - w^2}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial n} = \frac{R_3}{N}; \quad (21)$$

$$R_1 = \frac{v}{y}(q_n \cos \beta - q_s \sin \beta) - \frac{\partial q_s}{\partial s} - c \frac{\partial T}{\partial t} - c \xi_{2t} \cos \beta \frac{\partial T}{\partial s} - q_s \frac{\partial \sin \beta}{\partial y} + q_n \frac{\partial \cos \beta}{\partial y};$$

$$R_2 = \frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{q_n}{\gamma} + \xi_{2t} \cos \beta \frac{\partial q_n}{\partial s} + (q_n \sin \beta - q_s \cos \beta) \times \times \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} + (q_n \cos \beta + q_s \sin \beta) \frac{\partial \cos \beta}{\partial t};$$

$$R_3 = \xi_{2t} \cos \beta \frac{\partial q_s}{\partial s} + (q_n \cos \beta + q_s \sin \beta) \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} + (q_s \cos \beta - q_n \sin \beta) \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} + \frac{q_s}{\gamma} + \frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial s}.$$

При работе с этими выражениями нужно учитывать (13). Теперь остается вычислить касательные и нормальные производные на линии роста (12). Ясно, что  $T_j = T(\xi_1 = 0, \xi_2, t)$ ,  $q_{nj} = q_n(\xi_1 = 0, \xi_2, t)$ ,  $q_{sj} = q_s(\xi_1 = 0, \xi_2, t)$ , поэтому  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_j = \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\partial T_j}{\partial t'} + \xi_{2t} \cos \beta \frac{\partial T_j}{\partial s}$  и т. п.

Функции  $T_j, q_{nj}, q_{sj}$  определяем с помощью (15)—(17) через параметры расплава  $T^*, q^*$ . Продифференцировав по дуговой координате  $\partial/\partial s$  формулы (15)—(17), находим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_j = \frac{\partial T_j}{\partial s}, \quad \left(\frac{\partial q_n}{\partial s}\right)_j = \frac{\partial q_{nj}}{\partial s}, \quad \left(\frac{\partial q_s}{\partial s}\right)_j = \frac{\partial q_{sj}}{\partial s}.$$

Следовательно, чтобы определить нормальные производные на фазовой границе, нужно вычислить правые части в (19)—(21) с помощью динамических соотношений (15)—(17) и их дифференциальных следствий, получаемых воздействием операторов  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial s$ . Довольно простые итоговые формулы получаются для теплового состояния расплава вида  $T^* \equiv \text{const}$ ,  $q^* = q^*_0 \exp(-t/\gamma^*)$ ,  $q^*_0 \equiv \text{const}$ . Запись этих выражений здесь не приводится.

## Результаты и их обсуждение

### Градиентная катастрофа на фазовой границе

Эффект градиентной катастрофы состоит в том, что при ограниченности решения системы уравнений производные решения с ростом  $t$  неограниченно по модулю возрастают [12]. В ходе пространственно-временной эволюции фазовой границы возможны ситуации, при которых наступает градиентная катастрофа, а именно: производные (19)—(21) при  $t = t^1$  становятся неограниченно большими, непрерывное решение при  $t > t^1$  не существует. Таким образом, тепловое поле переходит в качественно новое состояние, которое предшествует формированию нового сильного разрыва вида (4)—(6) — математического образа фронта фазовых превращений. Возникновение градиентной катастрофы естественно рассматривать как математический критерий физического зарождения ветви дендрита. Анализ выражений (19)—(21) позволяет утверждать, что существуют три причины возникновения градиентной катастрофы.

1. Из формулы (19) ясно, что градиентная катастрофа наступает в звуковой точке  $(x_j^1, y^1, t^1)$ , когда  $N^2(y^1, t^1) = w_j^2$ ,  $R_2 + w_j R_1 \neq 0$ , где  $x_j^1 = x_j(y^1, t^1)$ . Это явление имеет в своей основе волновой механизм переноса тепла. Обозначим  $M^2 = N^2/w_j^2$  — квадрат теплового числа Маха. Если во всех точках линии роста имеется только дозвуковой ( $M^2 < 1$ ) или только сверхзвуковой ( $M^2 > 1$ ) режим движения, то градиентная катастрофа не возникает. Непрерывный переход от одного режима движения к другому невозможен: при  $M^2 = 1$  наступает градиентная катастрофа. Данный тип градиентных катастроф возможен для линий роста стационарной и нестационарной форм. Допустим, что звуковой точке  $N = -w_j$  соответствует сечение  $x = x^1$ , находящееся на расстоянии  $h > 0$  от вершины:  $x^1 = h + x_0(t^1) = h + 1 - A(t^1)$ . С помощью формулы (14) получаем условие существования звуковой точки в момент времени  $t = t^1$

$$\frac{\dot{p}(t^1)}{p(t^1)}(h+1) \ln(h+1) = w_j(M^1 - G^1), \quad M^1 = \frac{\dot{A}(t^1)}{w_j},$$

$$w_j \equiv \text{const}, \quad G^1 = G(y^1, t^1), \quad (22)$$

где  $y^1$  — полуширина дендрита (от оси симметрии к боковой стороне) в звуковом сечении  $x = x^1$ .

Связь между  $y^1$  и  $p(t^1)$  такая:  $[B(y^1)]^{p(t^1)} = h + 1$ . Пусть процесс сверхзвуковой,  $M^1 > 1$ . Тогда в конечной окрестности вершины найдется такое  $h > 0$ , для которого  $M^1 > G^1 > 1$  [см. формулу (13)]. Значит, при  $\dot{p}(t^1) < 0$  уравнение (22) решений не имеет: на стадии убывания кривизны вершины  $K_0(t) \sim p(t)$  градиентная катастрофа отсутствует. Вместе с тем при  $\dot{p}(t^1) > 0$  (заострение вершины) звуковая точка существует. Пусть процесс дозвуковой,  $0 < M^1 < 1$ . Тогда  $G^1 > M^1$ , и правая часть уравнения (22) отрицательная. Возьмем ситуацию, когда при  $t = 0$  условие (22) не выполняется. Если с течением времени наступает момент  $t = t^1 > 0$  такой, что  $-\infty < \dot{p}(t^1) < 0$ , то появляется звуковая точка. Например,  $t = t^1$ ,  $p(t^1) \rightarrow \varepsilon$ ,  $(h + 1) \ln(h + 1) / \varepsilon < \infty$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Следовательно, в дозвуковом процессе градиентная катастрофа возникает в окрестности вершины именно на стадии перехода к более плоскому фронту. Эти два результата (для случаев  $M^1 > 1$  и  $M^1 < 1$ ) естественным образом соотносятся с установленной в работе [13] зависимостью скорости роста от переохлаждения. В частности, там было показано существование верхнего порогового значения безразмерного переохлаждения, за которым плоский фронт устойчив. При  $M^1 < 1$  уравнение (22) дает возможность теплофизической интерпретации экспериментальных наблюдений [14]. В этой работе изучалась ранняя стадия дендритообразования: на фиксированном расстоянии  $x = x_1 > 0$  от вершины измерялась полуширина дендрита  $y_1(t)$ . Было установлено, что процесс является прерывистым, а функция  $y_1(t)$  колеблется, когда волна бокового ветвления проходит через точку наблюдения. В нашем случае это имеет следующее объяснение. Пусть скорость  $\dot{A}(t)$  близка к постоянной, например, она может колебаться с малой амплитудой около постоянного значения. По формуле (7) имеем на вершине  $\ddot{A}(t) \sim [-\dot{p}(t)]$ ; тонкие осцилляции скорости  $\dot{A}(t)$  и кривизны  $K_0(t) \sim p(t)$  измерены для дендритов льда в [5]. Значит,  $p(t)$ ,  $\dot{p}(t)$  — периодические функции, поэтому

периодически наступают моменты времени, в которые уравнение (22) выполняется, т. е. появляется звуковая точка — предвестник ветви дендрита. Этот колебательный процесс представляет собой своеобразные биения. Закономерности корреляции между колебаниями кривизны вершины  $K_0(t)$  и образование первых боковых ветвей изучались в работах [5, 15, 16]. (К вопросу о колебаниях скорости  $\dot{A}(t)$  мы вернемся в конце статьи).

2. Согласно (21), градиентная катастрофа наступает в точке остановки  $(x_{jr}, y_r, t_r)$  фазовой границы, когда  $N(y_r, t_r) = 0$ , т. е.

$$(\dot{p}B^p \ln B)_r = \dot{A}(t_r), \quad 0 \leq y < \infty. \quad (23)$$

При  $y = 0$  (23) дает  $\dot{A}(t_r) = 0$  — остановку вершины дендрита. Вследствие непрерывности функции  $B = B(y)$  в близких к вершине точках скорость  $N(y > 0, t_r)$  в зависимости от знака  $\dot{p}(t_r)$  может быть либо положительной, либо отрицательной [см. (14)]. В соответствии с этим момент остановки  $t = t_r$  предшествует началу расщепления вершины либо началу вытягивания носика дендрита. На конечном удалении от вершины ( $y > 0$ ) выполнение условия (23) означает, что на боковой стороне линии роста, слева и справа от точки остановки, начинают формироваться выступы. Эта складка является предвестником образования боковой ветви дендрита и наблюдалась в экспериментах [5]. Отметим еще, что (23) выполнено при всех конечных  $y > 0$ , если одновременно  $\dot{p}(t_r) = \dot{A}(t_r) = 0$ ,  $t_r > 0$ . В такой точке остановки кривизна вершины  $K_0(t)$  имеет локальный экстремум. Для фазовой границы стационарной формы ( $p(t) \equiv 1$ ) данный тип градиентной катастрофы обусловлен только остановкой линии роста. Еще одно важное обстоятельство: условие  $N(y_r, t_r) = 0$  проявляется на касательной компоненте  $q_s$  вектора теплового потока, а условие звуковой точки  $M^2 = 1$  — на нормальной компоненте  $q_n$ .

3. При подсчете системы  $(\partial q_n / \partial t)_j$ , входящей в  $R_2$  [см. формулы (15), (19), (20)], появляется выражение для  $\gamma_j \partial^2 N / \partial t^2$ , которое содержит производные по времени от линейного и углового ускорений

$$\gamma_j \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 A}{dt^2} \right), \quad \gamma_j \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 p}{dt^2} \right).$$

Градиентная катастрофа возникает при  $t \rightarrow t_3$ ,  $\gamma_j > 0$ , если  $p(t)$  и/или  $A(t)$  содержат степенную либо логарифмическую особенности:  $(t_3 - t)^{3-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ;  $(t_3 - t)^3 \ln(t_3 - t)$ ;  $t_3 > 0$ . Это означает, что при  $t = t_3$  скорость изменения нормального теплового потока становится неограниченно большой. Данный тип градиентной катастрофы соответствует морфологической неустойчивости линии роста.

Из формул (19)—(21) следует, что для дозвукового и сверхзвукового режимов движения различаются количественные и качественные свойства температурной неоднородности. В частности, это проявляется в знаках нормальных производных. Релаксационный теплоперенос на линии роста в некоторых случаях обладает неклассическим свойством:  $q \cdot \text{grad} T > 0$ . Возьмем для большей выразительности простой вариант, когда  $T_* \equiv \text{const}$ ,  $q_* \equiv 0$ , и плоская клиновидная фазовая граница перемещается с постоянной скоростью:  $v = 0$ ,  $K \equiv 0$ ,  $\dot{A} = b \equiv \text{const}$ ,  $N = -b \sin \beta < 0$ . Тогда из (19) получаем

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_j = \frac{q_{nj}}{\lambda_j (M^2 - 1)}, \quad q_{nj} = N(u_j - u_* - L) > 0,$$

$$u_j - u_* < L, \quad M^2 = \frac{N^2}{w_j^2}.$$

Для сверхзвукового движения ( $M^2 > 1$ ) имеем неклассическую ситуацию:  $q_{nj} > 0$ ,  $(\partial T / \partial n)_j > 0$ . Если скорость движения дозвуковая, то ситуация классическая:  $q_{nj} > 0$ ,  $(\partial T / \partial n)_j < 0$ .

### Колебания скорости вершины дендрита

Колебательная природа механизма образования боковых ветвей дендрита изучалась теоретически и экспериментально в работах [5, 15, 16]. Обсудим приближенный аналитический подход к этой задаче. Рассмотрим тепловые свойства системы "расплав—кристалл" на оси симметрии двухмерного дендрита. Учтем условия симметрии  $y = 0$ ,  $\partial q_1 / \partial y = 0$ ,  $\partial T / \partial y = 0$ ,  $q_2 = 0$  и запишем уравнения теплопереноса (2), (3) [см. также (9)—(11)] в виде

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_v, \quad q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (24)$$

где  $x \equiv n$ ;  $T = T(x, t) \equiv T(n, s = 0, t)$ ;  $q = q(x, t) \equiv q_1(n, s = 0, t)$ .

Система квазиодномерных уравнений (24) — своя для каждой из областей (\*) и (j). Здесь  $q_v^j = (-\partial q_2 / \partial y)_{y=0}^j$ . Сток энергии  $q_v^* < 0$  моделирует условия поддержания расплава в переохлажденном состоянии  $T = T_\infty$  и тоже содержит поправку  $(-\partial q_2 / \partial y)_{y=0}^*$  на двухмерность процесса. Для качественного анализа задачи конкретный вид этих поправок несуществен. Точное аналитическое описание функций  $T_*(t), T_j(t)$  с учетом условий (15)—(17) — непростая задача и составляет предмет отдельного исследования. Далее для наших целей достаточно принять, что эти температуры релаксируют в следующих интервалах:  $T_* \in (T_\infty, T^0]$ ,  $T_j \in [T_j(0), T_c)$ ,  $t \geq 0$ ;  $T_\infty < T_*(0) \leq T^0 < T_j(0) < T_c$ . Изучим точку остановки. Сдвиг по аргументам  $x, t$  позволяет рассматривать значения  $x = 0, t = 0$ . Слева и справа от неподвижного сильного разрыва  $x = 0$  возьмем локальные по координате квазистационарные решения

$$T_*(x) = T_0^* + T_1^* x + T_2^* x^2, \quad x \in (-\varepsilon, 0),$$

$$-2\lambda_* T_2^* = q_v^* \equiv \text{const};$$

$$T_j(x) = T_0^j + T_1^j x + T_2^j x^2, \quad x \in (0, \varepsilon),$$

$$-2\lambda_j T_2^j = q_v^j \equiv \text{const},$$

где  $\varepsilon$  — любое малое положительное число;  $\lambda_* T_1^* = \lambda_j T_1^j > 0$ .

В данной задаче важны два обстоятельства: 1) наличие градиента температуры слева от фазовой границы вследствие нагрева расплава за счет скрытой теплоты кристаллизации; 2) поддержание постоянной температуры  $T = T_\infty$  левой границы переохлажденного расплава, примыкающего к холодной стенке. Баланс энергии (15) принимает форму записи

$$L\gamma_j \ddot{x} + L_0 \dot{x} + 2(\lambda_* T_2^* - \lambda_j T_2^j)x =$$

$$= \left( \frac{\lambda_* c_j}{\lambda_j} - c_* \right) T_1^* \dot{x} - (c_* T_2^* - c_j T_2^j) \dot{x} x^2;$$

$$L_0 = L + c_* T_0^* - c_j T_0^j - T_c (c_* - c_j) > 0,$$

где  $x = x_0(t)$  — координата вершины.

Эта динамическая система имеет одну особую точку  $x = 0, \dot{x} = 0$ . В малой окрестности состояния покоя поведение фазовых траекторий зависит от корней характеристического уравнения

$$2r_{1,2} = a_2 \pm (a_2^2 - 4a_1)^{1/2}, \quad a_1 = \frac{q_v^j - q_v^*}{L\gamma_j} > 0, \\ a_2 = \frac{-L_0}{L\gamma_j} < 0. \quad (25)$$

Если  $a_2^2 \geq 4a_1$ , то особая точка — устойчивый узел, т.е. процесс апериодический. Если  $a_2^2 < 4a_1$ , то особая точка — устойчивый фокус: период затухающих колебаний равен  $\theta = 2\pi/(4a_1 - a_2^2)^{1/2}$ .

Таким образом, знак в выражении (25) определяется в первую очередь конкуренцией между стоком энергии  $q_v^*$  и выделением кристаллизационного тепла на фоне неравновесного теплопереноса ( $\gamma_j > 0$ ). В количественном отношении основные факторы влияния на период  $\theta$  и коэффициент затухания  $a_2$  следующие: сток энергии  $q_v^*$ , скачок температуры  $T_0^j - T_0^*$  (см. формулу для  $L_0$ ) и время релаксации  $\gamma_j$ . Учитывая связь  $\ddot{x}_0(t) \sim \dot{p}(t)$  [см. (7), (14) и формулу для  $K_0(t)$ ], получаем, что такой же период колебаний имеют функции  $p(t), \dot{p}(t)$ . Следовательно, колебания скорости (ускорения) вершины создают условия, при которых появляется звуковая точка (22), расположенная на конечном расстоянии  $h > 0$  от вершины. Остается отметить важное обстоятельство: если звуковая точка находится на вершине ( $h = 0$ ), то в малой окрестности непрерывной тепловой волны  $x_0 = -w_*t$ ,  $w_* = w_j$  периодическое движение не существует; здесь возможна только апериодическая релаксация.

### Заключение

Отличительная черта рассмотренных процессов — хорошо выраженная локальная неравновесность теплопереноса в твердой и жидкой фазах.

В математическом отношении это означает гиперболический тип определяющих уравнений. Исходное предположение (12) о нестационарной форме фазовой границы получило на качественном уровне подтверждение при теплофизическом истолковании результатов экспериментальных наблюдений дендритообразования. Критерием зарождения боковой ветви дендрита служит градиентная катастрофа на фазовой границе. Представленные три типа градиентных катастроф соответствуют вырожденным состояниям на линии роста: звуковой точке, точке остановки, а также неограниченной скорости изменения нормального теплового потока. Предметом дальнейших исследований являются условия появления острых кромок, линий излома и складок на поверхности роста кристалла.

### Литература

1. Brener E. A., Mel'nikov V. I. // Adv. Phys. 1991. V. 40. № 1. P. 53.
2. Бренер Е. А., Темкин Д. Е. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. Вып. 3. С. 1038.
3. Мартюшев Л. М., Селезнев В. Д., Кузнецова И. Е. // Там же. 2000. Т. 118. Вып. 1. С. 149.
4. Mullis A. M. // Acta Mater. 2003. V. 51. P. 1959.
5. Казаков А. А., Леонов А. А., Столбенников С. С., Шибков А. А. Рост монокристаллов и тепломассоперенос // Сб. тр. 6-й междунар. конф. В 4-х томах. — Обнинск: ГНЦ РФ-ФЭИ. 2005. Т. 4. С. 908.
6. Galenko P. K., Zhuravlev V. A. Physics of dendrites: computational experiments. — Singapore: World Scientific, 1994.
7. Лыков А. В. // ИФЖ. 1965. Т. 9. № 3. С. 287.
8. Шабловский О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. — Гомель: ГГТУ, 2003.
9. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. — М.: Мир, 1966.
10. Шабловский О. Н., Кроль Д. Г. // Расплавы. 2005. № 4. С. 69.
11. Emanuel G., Min-Shan Lui // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 3625.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
13. Brener E. A., Temkin D. E. // Europhys. Lett. 1989. V. 10. P. 171.
14. Dougherty A., Kaplan P. D., Gollub J. P. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 58. № 16. P. 1652.
15. Kessler D. A., Koplik J., Levine A. // Adv. Phys. 1988. V. 37. № 3. P. 255.
16. La Combe J. C., Coss M. B., Frei J. E. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. № 3. P. 031604-1.