Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В K-ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

В линейных полуупорядоченных пространствах Л. В. Канторовича (K-пространствах) ([1]) естественным образом определяются понятия регулярного и линейного функционалов ([2]).

Предложения, сформулированные в настоящей заметке, оправдывают введение понятия вполне линейных (в собственном и обобщенном смысле) функционалов, роль которых в теории K-пространств во многом аналогична роли линейных функционалов в теории пространств Banach'a. Определение вполне линейного функционала требует некоторого обобщения понятия предела в K-пространствах.

Определение 1. Последовательность $\{x_\xi\}$ ($\xi<\Omega_\alpha$) элементов K-пространства x назовем трансфинитно сходящейся к элементу $x\in X$, в обозначении

$$\operatorname*{Lim}_{\xi} x_\xi = x,$$

$$\text{если } \inf_{\xi<\Omega_\alpha}[\sup(x_\xi, x_{\xi+1},\ldots)] = \sup_{\xi<\Omega_\alpha}[\inf(x_\xi, x_{\xi+1},\ldots)] = x.$$

Элемент x назовем трансфинитным пределом последовательности $\{x_\xi\}$.

Последовательность, сходящаяся в обычном смысле, будет, очевидно, трансфинитно сходиться к тому же пределу.

Трансфинитный предел обладает многими свойствами обычного предела, в частности, если $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_\xi\leqslant\ldots$ ($\xi<\Omega_\alpha$), то существует трансфинитный предел $\operatorname*{Lim}_{\xi} x_\xi = \sup_{\xi<\Omega_\alpha}\{x_\xi\}$.

Определение 2. Аддитивный функционал $f(x)$, заданный в K-пространстве X, назовем вполне линейным (в собственнном смысле), если, какова бы ни была трансфинитно сходящаяся последовательность $\{x_\xi\}$, элементов X,

$$\operatorname*{Lim}_{\xi} f(x_\xi) = f[\operatorname*{Lim}_{\xi} x_\xi].$$

Вполне линейный функционал является вместе с тем и линейным. Обратное, вообще говоря, неверно, как это следует из следующего примера.

Пример линейного, но не вполне линейного функционала. Рассмотрим K-пространство X всевозможных ограниченных вещественных функций, заданных на некотором множестве M мощности $\aleph_1$ (алгебраические операции и полуупорядоченность определены в X обычным образом). Вполне упорядоченную последовательность $\{E_\alpha\}$ ($\alpha<\vartheta$) подмножеств M назовем цепью в M, если:

1) пересечение всякой счетной совокупности множеств E_α есть несчетное множество;

2) разность $E_{\alpha'} - E_{\alpha''}$ $(\alpha' < \alpha'')$ множеств последовательности есть несчетное множество.

Цепь $T = \{E_\alpha\}$ назовем максимальной, если, какоео бы ни было множество $E^* \subset M$, последовательность

$$E_1, E_2, \ldots, E_\alpha, \ldots, \ E^*$$

уже не является цепью.

Легко видеть, что в M существует (по крайней мере одна) максимальная цепь $T = \{E_\alpha\}$.

Множество $P \subset M$ отнесем к первой категории, если P содержит пересечение счетной совокупности множеств E_α (с точностью до счетного множества). К второй категории отнесем всякое множество $Q \subset M$, являющееся дополнением некоторого множества P первой категории, $Q = M - P$.

Нетрудно показать, что всякое множество $E \subset M$ принадлежит к первой или второй категории и только к одной из них.

Отметим некоторые свойства множества первой и второй категории.

1. Всякое счетное множество — второй категории.

2. Если Q — второй категории и $Q' \subset Q$, то и Q' — второй категории.

3. Сумма конечного или счетного множества множеств второй категории есть множество второй категории.

4. Пересечение счетного множества множеств первой категории есть множество первой категории.

5. Только одно из попарно непересекающихся множеств E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ может быть первой категории.

Каждому множеству $E \subset M$ отнесем неотрицательное вещественное число $m(E)$ — меру E, полагая

$$m(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } E \text{ — первой категории,} \\ 0, & \text{если } E \text{ — второй категории.} \end{cases}$$

Из указанных выше свойств множеств первой и второй категории следует, что для всякой последовательности $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

Определим теперь в X функционал $f(x)$, полагая

$$f(x) = \int_M x(t)\, m(dE)$$

$(x = x(t)$, интеграл понимается в смысле Radon'a). Очевидно, $f(x)$ — линейный функционал. Однако он не будет вполне линейным. Действительно, пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

вполне упорядоченная последовательность всех элементов M и S_α $(\alpha \leq \Omega)$ — совокупность элементов этой последовательности с индексами, не превосходящими α. Характеристическую функцию множества S_α обозначим через x_α; очевидно

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha} x_\alpha = x_\Omega,$$

но $f(x_{\mathfrak{a}})=0$, а $f(x_{\Omega})=1$, следовательно, $f(x)$ не вполне линейный функционал.

K-пространство X назовем пространством нулевого класса, если всякое ограниченное множество X не более, чем счетное.

Теорема 1. *В пространстве нулевого класса всякий линейный функционал будет вместе с тем и вполне линейным.*

Теорема 2. *Во всяком пространстве ограниченных элементов не нулевого класса существуют линейные, но не вполне линейные функционалы.*

Линейный функционал $f(x)$ назовем сингулярным, если всякий линейный функционал f', $|f'|\leqslant|f|$, не вполне линейный.

Регулярный функционал $f(x)$ назовем вполне разрывным, если всякий регулярный функционал f', $|f'|\leqslant|f|$, не является линейным функционалом.

Теорема 3. *Пространство X_r^* регулярных функционалов, заданных в X, разлагается в дизъюнктную сумму подпространств: X^* — вполне линейных, X'_k — сингулярных и X'_r — вполне разрывных функционалов*

$$X_r^*=X^*+X'_k+X'_r.$$

Всякий регулярный функционал f_r единственным образом представляется в виде суммы вполне линейного, сингулярного и вполне разрывного функционалов.

Этот результат аналогичен известному предложению анализа о представлении функции ограниченной вариации в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной функций и функции скачков. Существенное значение имеет следующая

Теорема 4. *Максимальное расширение* (3) *пространства вполне линейных функционалов, заданных в пространстве X, изоморфно максимальному расширению X.*

Обобщим понятие вполне линейного функционала. С этой целью введем следующее

Определение 3. Отнесем каждому положительному элементу K-пространства X неотрицательное вещественное число (конечное или бесконечное) $f(x)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ $(x_1, x_2\geqslant 0)$;

2) каков бы ни был элемент $x>0$, существует элемент x', $0<x'\leqslant x$, такой, что $f(x')<+\infty$;

3) если $\operatorname*{Lim}_{\xi} x_{\xi}=x$ и $f(x_{\xi})<+\infty$, то $\operatorname*{Lim}_{\xi} f(x_{\xi})=f(x)$.

Для произвольного элемента $x=x_+-x_-$ положим $f(x)=f(x_+)-f(x_-)$. Если $f(x_+)=f(x_-)=+\infty$, то $f(x)$ не будем приписывать никакого определенного значения.

Функционал $f(x)$ назовем положительным обобщенным вполне линейным функционалом. Всякий функционал, представляемый в виде разности двух положительных обобщенных вполне линейных функционалов, будем называть обобщенным вполне линейным функционалом.

Теорема 5. *Совокупность вполне линейных (в обобщенном смысле) функционалов, заданных в K-пространстве X, представляет собой K-пространство, изоморфное максимальному расширению пространства вполне линейных функционалов в X.*

Вопрос об условиях существования линейных функционалов в K-пространствах имеет основное значение для теории этих пространств. До настоящего времени этот вопрос не был решен ни полностью, ни частично. Отправляясь от результатов моих предыдущих работ, можно доказать следующие предложения:

Теорема 6. *Каков бы ни был элемент $x_0 \neq 0$ произвольного K-пространства X, существует вполне линейный (в обобщенном смысле) функционал f_0 такой, что $f_0(x_0) \neq 0$.*

Теорема 7. *Для того чтобы в K-пространстве X для всякого элемента $x_0 \neq 0$ существовал вполне линейный функционал f_0 такой, что $f_0(x_0) \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы X разлагалось в дизъюнктную сумму подпространств X_α ($\alpha \in A$), каждое из которых допускает расширение типа $(KB)_5$.*

Условию теоремы 7 удовлетворяют, в частности, все пространства ограниченных элементов.

Рассмотрим вопрос о представлении линейных функционалов с помощью операции умножения в K-пространствах.

Б. З. Вулиху принадлежит следующее предложение ([4]): если X — элементарное пространство (т. е. X содержит единицу и всякое множество попарно дизъюнктных элементов X не более, чем исчислимо) и если сопряженное X пространство линейных функционалов содержит единицу Φ, то «ограниченный» линейный функционал $f(x)$ $(x \in X)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \Phi(xy) \quad (x \in X, y \text{—ограниченный элемент } X).$$

Можно ли в виде $(*)$ представить линейные функционалы в произвольных K-пространствах? Ответом служит следующая

Теорема 8. *Не всякий линейный функционал можно представить в виде $(*)$. Напротив, всякий вполне линейный (в собственном и обобщенном смысле) функционал $f(x)$ в произвольном K-пространстве X может быть представлен в виде $(*)$, причем y — произвольный фиксированный элемент максимального расширения X, а Φ — единица сопряженного пространства (существование которой не нужно постулировать, так как сопряженное пространство расширенное и непременно содержит единицу).*

Настоящая теорема исчерпывает вопрос о представлении линейных функционалов в виде $(*)$.

Поступило
27 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУТА

[1] Л. В. Канторович, Матем. сб., **2** (44), 121 (1937). [2] Л. В. Канторович, Матем. сб., **7** (49), 209 (1940). [3] А. Г. Пинскер, ДАН, **21**, № 1—2 (1938). [4] Б. З. Вулих, ДАН, **52**, № 2 (1946).