Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. МЫШКИС

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛЕММЕ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

Пусть в $n+1$-мерном евклидовом пространстве $x_1, \ldots, x_n, t$ E_{n+1} имеется область G. Мы впредь будем считать, что G удовлетворяет условию χ: существует непрерывное отображение χ полуполосы

$$s \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty) \quad (\text{т. е. } 0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t < \infty) \qquad (1)$$

в E_{n+1} такое, что для любых s и t, удовлетворяющих (1), будет

$$\chi(s, t) \in G^t \quad (s \neq 0),$$
$$\chi(0, t) = \{0, \ldots, 0, t\} = O_t\,,\ \rho(\chi(1, t), O_t) \geqslant a > 0; \qquad (2)$$

верхний индекс t означает, что берется совокупность всех точек множества, имеющих данное значение t, а $\rho(A, B)$ есть расстояние между точками A и B; a не зависит от t.

Пусть, далее, в гиперплоскости $t = 0$ имеется конечное $n-1$-мерное многообразие S (см. ([1]), стр. 60 и гл. 10); мы предположим, что S содержит начало координат внутри себя * и целиком лежит в цилиндре C

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < a^2$$

Пусть, наконец, в E_{n+1} имеется семейство траекторий $T(A,t)$ $(0 \leqslant t < \infty,\ A \in \overline{S \cap G}$**), где

$$T(A, t) \in E_{n+1}^t, \quad T(A, 0) = A, \quad 0 < \rho(T(A, t), O_t)$$
$$(t \in [0, \infty),\ \ A \in \overline{S \cap G}); \qquad (3)$$

при этом $T(A, t)$ есть непрерывная функция совокупности аргументов на своей области определения. Мы поставим для семейства траекторий условие Γ: пусть для A_0 и t_0 $T(A_0, T_0) \in \overline{G} - G = \Gamma$. Тогда для любых $t_1 > t_0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\rho(A_1, A_0) < \delta$ имеет место, по крайней мере, один из двух случаев:

1°. $T(A_1, t) \in \Gamma$ при некотором $t \in [0, t_1]$.

2°. Расстояние от $T(A_1, t_1)$ до Γ не превосходит ε.

Лемма. *Пусть выполнены условия* χ, Γ *и*

$$\rho(T(A, t), O_t) < a \quad (0 \leqslant t < \infty,\ A \in \overline{S \cap G}). \qquad (4)$$

* Как известно, S делит гиперплоскость $t = 0$ на две части (см. ([2]), ([3]), X, § 2, 4 стр. 395).

** $\overline{E}$ есть замыкание E.

Тогда для некоторого $A \in \overline{S \cap G}$ *для всех* $t \in [0,\infty)$ *будет* $T(A,t) \in \overline{G}$.

Доказательство. 1) Ориентируем S^* и обозначим через $S(t)$ совокупность тех точек $A \in S \cap G$, для которых при всех $\tau \in [0,t]$ $T(A,\tau) \in G$; в частности, $S(0) = S \cap G$. Из непрерывности T следует, что $S(t)$ открыто на S при каждом t ($\in [0,\infty)$). Посредством функции T $S(t)$ непрерывно отображается на $T(S(t),t) = P(t)$. Таким образом, $P(t)$ является кривым бесконечным $n-1$-мерным ориентированным комплексом. В то же время при каждом t посредством функции χ отрезок $[0,1]$, ориентированный в естественном порядке, непрерывно отображается на кривую l_t

2) $$T[\overline{S(t)} - S(t), t] \subset \Gamma \quad (t \in [0,\infty)). \qquad (5)$$

Действительно, пусть $A_0 \in \overline{S(t_0)} - S(t_0)$. Тогда $T(A_0,t_0) \overline{\in} E_{n+1} - \overline{G}$, что сразу следует из непрерывности T. Пусть $T(A_0,t_0) \in G$. В силу $A_0 \overline{\in} S(t_0)$ траектория $T(A_0,t)$ пересекает Γ по крайней мере один раз при $t = t' \in [0, t_0]$. В силу условия Γ для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(A_0)$ такая, что если $A_1 \in U(A_0) \cap S(t_0)$, то $T(A_1,t_0)$ отстоит от Γ не больше, чем на ε. Однако это, очевидно, противоречит непрерывности T, $A_0 \in \overline{S(t_0)}$ и $T(A_0,t_0) \in G$, что и требуется.

3) В силу (2), (3), (4) и (5) мы можем рассмотреть индекс $\varkappa(t)$ пересечения $P(t)$ и l_t в E^t_{n+1}, ориентированном по схеме $OX_1 \ldots X_n$. При этом для того, чтобы пересекались конечные полиэдры, мы можем апроксимировать $S(t)$ конечным полиэдром $S^*(t)$; ясно, что индекс пересечения $T(S^*(t),t)$ с l_t не зависит от конкретного выбора S^*, если только апроксимация настолько хороша, что $\overline{P(t) - T(S^*(t),t)} \cap l_t$ пусто.

4) $\varkappa(0) = \pm 1$, в зависимости от ориентации S. Действительно, в E^0_{n+1} l_0 начинается внутри S и кончается вне S, в то время как $S \cap l_0 \subset P(0) = S(0)$; утверждение сразу следует из двусторонности S (см. ([1]), § 76, стр. 317).

5) $\varkappa(t)$ является целочисленной непрерывной функцией t для каждого t_0 с непустым $S(t_0)$. Действительно, в силу непрерывности T и χ апроксимирующий комплекс $S^*(t_0)$ (см. 3)) годится для подсчета $\varkappa(t)$, если только $|t - t_0|$ достаточно мало. Инвариантность же индекса пересечения $T(S^*(t_0), t)$ с l_t при достаточно малом $|t - t_0|$ следует, например, из ([1]), §§ 73 — 74.

6) $S(t)$ непусто при всех $t \geqslant 0$. Действительно, пусть в противном случае $t_0 > 0$ есть нижняя грань тех t, для которых $S(t)$ пусто. Тогда при $0 \leqslant t < t_0$ $\varkappa(t) = \pm 1$, и потому $P(t) \cap l_t$ непусто (см. ([1]), § 74, стр. 304). Возьмем $t_1 < t_2 < \ldots \to t_0$ и $A_i \in S(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ так, что

$$T(A_i, t_i) \in l_{t_i} \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad A_i \xrightarrow[i \to \infty]{} A \in \overline{S \cap G}.$$

Тогда $T(A,t_0) \in l_{t_0}$, и поэтому $T(A,t_0) \in G$. Поэтому, в силу непрерывности T, при достаточно больших i должно быть $T(A_i, t) \in G$ для всех $t \in [0, t_0]$. По определению, t_0 для некоторого $t' \in [0, t_0]$ $T(A, t') \in \Gamma$. Отсюда, в силу условия Γ, расстояние от $T(A_i, t_0)$ до Γ стремится к 0 при $i \to \infty$, и $T(A,t_0) \in \Gamma$, что невозможно.

7) Пусть $A \in \prod_{i=1}^{\infty} \overline{S(i)} \subset \overline{S \cap G}$. Ясно, что для всех $t \in [0,\infty)$ будет $T(A,t) \in \overline{G}$.

Лемма доказана.

---

* Это всегда возможно; см., например, ([3]), X, § 2, 4, стр. 395.

Замечание 1. Неравенства в (2) и (4), связанные с числом a, можно ослабить. Именно, можно требовать только $\rho(\chi(1,0), O_0) \geqslant a$, в то время как при $t > 0$ требовать $\chi(1,t) \overline{\in} P(t)$ (при обозначениях 1)). Утверждение леммы останется в силе; доказательство не изменится.

Замечание 2. Положим, что кроме выполнения условия Г дано следующее: пусть A — произвольная точка, для которой $T(A, t) \in \Gamma$ при некотором $t \in [0,\infty)$; тогда найдется окрестность $U(A)$ и число $t_0(A)$ такие, что для любой $A' \in U(A)$ при некотором $t'(A') \in [0, t_0(A)]$ $T(A', t'(A')) \in \Gamma$. Тогда лемму можно усилить, именно, тогда для некоторого $A \in S \cap G$ для всех $t \in [0,\infty)$ будет $T(A, t) \in G$.

Действительно, в силу выполнения нового условия для любых $A \in \prod_{i=1}^{\infty} \overline{S(i)}$ (см. 6)) и $t \in [0,\infty)$ будет $T(A,t) \overline{\in} \Gamma$.

Замечание 3. Обозначим через $\tau(A)$ $(A \in \overline{S \cap G})$ момент первой встречи $T(A, t)$ с Г $(0 \leqslant \tau(A) \leqslant \infty)$ *. Тогда из полунепрерывности τ на $\overline{S \cap G}$ сверху, т. е.

$$\overline{\lim_{A' \to A}} \tau(A') \leqslant \tau(A) \quad (A \in \overline{S \cap G}), \tag{6}$$

следует как условие Г, так и условие замечания 2. Таким образом, из полунепрерывности τ сверху следует утверждение леммы в усиленной замечанием 2 форме.

Отметим, что полунепрерывность функции τ снизу есть очевидное следствие непрерывности T. Отсюда требование (6) эквивалентно требованию непрерывности τ.

Замечание 4. Пусть известно, что если для A_0 и t_0 $T(A_0, t_0) \in \Gamma$, то при всех $t > t_0$ $T(A_0, t) \overline{\in} G$. Тогда условие Г, очевидно, выполнено. Если, кроме того, дано, что для любых таких A_0 и t_0 для некоторого $t_1 = t_1(A_0, t_0) > t_0$ при всех $t \in (t_0, t_1)$ будет $T(A_0, t) \overline{\in} \Gamma$, то выполнено, очевидно, условие (6) замечания 3.

Замечание 5. Обозначим через $I(S) \subset E^0_{n+1} - S$ внутренность S. Пусть непрерывное семейство траекторий $T(A, t)$ имеет начальными точками не только $\overline{S \cap G}$, но все $\overline{I(S) \cap G} - O_0 = E$ при выполнении (3). Тогда, если выполнены условия Г и (4), множество M точек $A \in E$, для которых при всех $t \in [0,\infty)$ $T(A,t) \in \overline{G}$, при добавлении к нему O_0 содержит континуум, соединяющий O_0 с S. Если выполнено условие замечания 2, этим же свойством обладает множество точек $A \in E$, для которых при всех $t \in [0,\infty)$ $T(A, t) \in G$. Замечания 3 и 4 также переносятся на этот случай автоматически.

Для доказательства, например, первого утверждения заметим, что $M + O_0$, очевидно, замкнуто. Если бы компонента связности O_0 в $M + O_0$ не содержала точек S, то при некотором $\varepsilon > 0$ ε-компонента K_ε O_0 в $M + O_0$ (см. ([4]), § 30, стр. 173 — 174) не содержала бы точек S. Описав около каждой точки K_ε $n-1$-мерную сферу достаточно малого радиуса и воспользовавшись теоремой Heine — Borel'я, мы легко нашли бы $n-1$-мерное конечное многообразие $S' \subset I(S)$, содержащее O_0 внутри себя, с пустым $S' \cap M$. Однако это противоречит лемме. Аналогично доказываются прочие утверждения замечания 5.

Замечание 6. Лемма с замечаниями 2 — 5 имеет непосредственное приложение в теории устойчивости Ляпунова. Действительно, например, если выполнены все условия леммы, кроме (4), и известно, что для любого A_0 невозможно $T(A_0, t) \in \overline{G} \cap C$ при всех $t \in [0,\infty)$, то из леммы следует, что для некоторых $A_0 \in \overline{S \cap G}$ и $t_0 > 0$ будет

---

* $\tau(A) = \infty$, если $T(A, t) \overline{\in} \Gamma$ при всех $t \in [0, \infty)$.

$\rho(T(A_0, t_0), O_{t_0}) \geqslant a$. В случае выполнения условий замечания 2 получится дополнительно $A_0 \in \overline{S \cap G}$. Аналогично замечанию 5 при этом получится, что если траектории начинаются на E, то множество точек $A \in E$, для которых при некотором $t(A)$ будет $\rho(T(A, t(A)), O_{t(A)}) \geqslant a$, при добавлении к нему O_0 содержит континуум, соединяющий O_0 с S, и т. д.

Замечания 4 и 5 уточняют теорему К. П. Персидского ([5], стр. 88—91). Из выполнения условия теоремы Н. Г. Четаева ([6], [7], § 2), связанного со знаком W' на поверхности $W=0$, как легко видеть, следует выполнение условия замечания 3. Тут этому условию можно дать следующий вид: существует окрестность U множества L всех точек пересечения всех траекторий с Γ и на $U \cap G$ функция $W > 0$ такая, что если $B \in L$, то

$$\lim_{B' \to B, B' \in G} W(B') = 0, \qquad \overline{\lim_{B' \to B, B' \in \overline{K \cap G}}} DW(B') < 0, \tag{7}$$

где под DW понимается любое из производных чисел функции W по t, взятых вдоль траекторий, а K есть множество всех точек всех траекторий (в случае $B \overline{\in} \overline{K \cap G}$ второе соотношение (7) отпадает). Этот критерий можно применять как для $\overline{S \cap G}$, так и для E.

Поступило
27 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Зейферт и В. Трельфалль, Топология, 1938. [2] L. E. J. Brouwer, Math. Ann., 71:3, 314 (1911). [3] P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie, Berlin, 1935. [4] Ф. Хаусдорф. Теория множеств, 1937. [5] К. П. Персидский, Диссертация, МГУ, 1946. [6] Н. Г. Четаев, ДАН, 1:9, 529 (1934). [7] Н. Г. Четаев, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 98:9, 43 (1938).