Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЛИБЕР

О ВМЕЩЕНИИ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ДРУГ В ДРУГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

Римановы многообразия постоянной кривизны S_n характеризуются особым строением аффинора кривизны, именно:

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = K(a_{\nu\lambda}a_{\mu\varkappa} - a_{\nu\varkappa}a_{\mu\lambda}).$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, K — постоянная, греческие индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, n$ и $a_{\lambda\mu}$ — положительно определенный тензор.

S_n разбиваются на три категории: 1) сферические ($K>0$), 2) плоские ($K=0$) и 3) гиперболические ($K<0$).

Если S_n категории A может быть вмещено в S_m категории B (т. е. может быть представлено в виде n-мерной поверхности в S_m категории B) и не может быть вмещено ни в какое S_{m-1} категории B, то число

$$k(A;B) = m - n \tag{1}$$

назовем классом многообразий категории A относительно многообразий категории B.

При вмещении S_n в плоское m-мерное многообразие, как известно, существуют такие p тензоров $h^i_{\lambda\varkappa}$, что тождественно выполняются уравнения Гаусса.

$$K(a_{\nu\lambda}a_{\mu\varkappa} - a_{\nu\varkappa}a_{\mu\lambda}) = \sum_{i=1}^{p} (h^i_{\nu\lambda}h^i_{\mu\varkappa} - h^i_{\nu\varkappa}h^i_{\mu\lambda}). \tag{2}$$

Лемма. *Пусть $a_{\lambda\varkappa}$ — положительно определенный тензор, $K<0$. Тогда система* (2) *не имеет решения при $p<n-1$, т. е. невозможно найти p ($p\leqslant n-2$) таких тензоров $h^i_{\lambda\varkappa}$, чтобы* (2) *выполнялось тождественно.*

Доказательство этой леммы дано мною в ([2]).

Рассмотрим уравнения:

$$x^{2l-1} = \xi^n \sin \xi^l, \quad x^{2l} = \xi^n \cos \xi^l, \quad x^{2n-1} = F(\xi^n),$$
$$x^{2n} = \Phi(\xi^n), \quad l = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

где x_j суть декартовы ортогональные координаты в плоском $2n$-мерном многообразии.

Если положить $\Phi(u) \equiv 0$, $F(u) = f(u)$, где $f(u)$ — функция, предложенная Шуром ([1]), то уравнения (3) определят n-мерное гиперболическое многообразие в $(2n-1)$-мерном плоском многообразии.

Если определить функции $F(\xi^n)$ и $\Phi(\xi^n)$ из уравнений

$$(n-1)(\xi^n)^2 + \Phi^2(\xi^n) + F^2(\xi^n) = c^2;$$
$$\Phi'^2(\xi^n) + F'^2(\xi^n) = f'^2(\xi^n), \tag{4}$$

то уравнения (3) будут определять гиперболическое S_n в сферическом S_{2n-1}.

Пусть гиперболическое S_n вмещено в сферическое S_m. Обозначим $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек плоского $m+1$-мерного многообразия. Тогда уравнение $\mathbf{r}^2 = c^2$, $c = \text{const}$, определит сферическое S_m в плоском S_{m+1}. Стало быть, наше гиперболическое S_n является поверхностью в плоском S_{m+1} и определяется в нем уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, причем $\mathbf{r}^2 = c^2$.

Определим теперь первую нормаль $\overset{1}{\mathbf{n}}$ к гиперболическому S_n в плоском S_{m+1} так: $\overset{1}{\mathbf{n}} = c\,\mathbf{r}$.

Тогда $\overset{1}{h}_{\lambda\varkappa} = -ca_{\lambda\varkappa}$, уравнения Гаусса имеют вид (2), причем $p = m - n + 1$ и $K < 0$. Однако, если перенести первый член суммы справа в левую часть, то, в силу найденного значения $\overset{1}{h}_{\lambda\varkappa}$, мы получим снова уравнения типа (2), только $p = m - n$ и K заменится на $^*K = K - c^2$. Поэтому, согласно высказанной лемме, $m - n \geqslant n - 1$, или $m \geqslant 2n - 1$. Итак, гиперболическое S_n не может быть вмещено в сферическое многообразие меньше, чем $2n-1$ измерений.

Непосредственное применение леммы к уравнениям Гаусса для гиперболического S_n дает аналогичный результат и для вмещения гиперболического S_n в плоское многообразие.

Класс гиперболического многообразия как относительно сферического, так и относительно плоского многообразий равен $n-1$.

Для гиперболического S_n первую квадратичную форму можно представить в виде:

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + \ldots + (d\xi^n)^2 - (d\varphi)^2;$$
$$\varphi = \sqrt{K^2 + (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2}. \tag{5}$$

Полагая $\varphi = c$ ($c = \text{const} > K$), мы замечаем, что (5) представляет первую квадратичную форму сферического S_{n-1}. Таким образом, класс сферического многообразия как относительно плоского, так и относительно гиперболического равен 1.

Полагая в уравнениях (3) $\Phi \equiv 0$, $F \equiv f$, имеем гиперболическое S_n; при $\xi^n = \text{const}$ получаем плоское S_{n-1} в гиперболическом S_n. Полагая $F \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$, $\xi^n = \text{const}$, получаем плоское S_{n-1} в сферическом S_{2n-3}. Плоское S_n вмещается в гиперболическое S_{n+1} и сферическое S_{2n-1}. Пусть мы вместили плоское S_n в сферическое S_m, которое, в свою очередь, лежит в плоском S_{m+1}. Выбирая первую нормаль к плоскому S_n таким же способом, как выше, мы опять получим $\overset{1}{h}_{\lambda\varkappa} = ca_{\lambda\varkappa}$. Если теперь в уравнениях Гаусса для плоского S_n в плоском S_{m+1}, имеющих вид (2) (только $K = 0$), первый член суммы справа перенесен в левую часть, то придем к уравнениям типа (2) с $p = m - n$ и $K = -c^2$. Следовательно, на основании высказанной леммы, $m - n \geqslant n - 1$, и плоское S_n не может быть вмещено в сферическое S_m при $m < 2n - 1$.

Класс плоского многообразия относительно гиперболического многообразия равен 1, относительно сферического многообразия равен $n-1$.

Для двух разных категорий A и B римановых многообразий постоянной кривизны оказывается справедливым соотношение

$$k(A;B)+k(B;A)=n. \tag{6}$$

Из приведенных предложений вытекает также следующее. В гиперболическое S_n вмещаются сферическое и плоское многообразия с максимальным числом измерений $n-1$; в плоское n-мерное многообразие вмещаются сферические и гиперболические многообразия с максимальным числом измерений, соответственно, $n-1$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right]$; в сферическое S_n вмещаются плоские и гиперболические многообразия с максимальным числом измерений $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (символ $[x]$ означает „целая часть от x“).

Поступило
12 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Schur, Math. Ann., 27, 170 (1886). [2] А. Е. Либер, Уч. записки Саратовск. гос. ун-та, 1 (14), в. 2, 105 (1938).