Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 7

ГИДРОМЕХАНИКА

Академик П. Л. КАПИЦА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭМПИРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ДВУХМЕРНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Вычисление коэффициента теплопередачи потока в трубах — одна из распространеннейших задач тепловой и холодильной техники.

Обозначим коэффициент теплопередачи через α, температуру стенки через T_1, а среднюю температуру потока через T_m. Величина $T_m - T_1$ называется средним температурным напором. Через единицу поверхности трубы в единицу времени будет проходить количество тепла Q_0, равное:

$$Q_0 = \alpha (T_m - T_1). \tag{1}$$

Для практических целей α обычно выражают как функцию безразмерных величин. Для потока в трубах мы считаем более удобным пользоваться в качестве основной безразмерной величины так называемым числом теплопередачи K_h. Оно связано с α следующим образом:

$$\alpha = c\, U\rho_m K_m, \tag{2}$$

где c — теплоемкость потока, ρ — плотность и U_m — средняя скорость. Число K_h еще мало внедрилось в техническую литературу, где чаще пользуются в качестве безразмерного критерия числом Нуссельта Nu. Между Nu и K_h существует простая зависимость:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\, K_h, \tag{3}$$

где Re — число Рейнольдса, равное для трубы круглого сечения радиуса r и среды с кинематической вязкостью ν:

$$\mathrm{Re} = \frac{2r\,U_m}{\nu}. \tag{4}$$

Число Прандтля Pr равно:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{k/\rho c}, \tag{5}$$

где k — теплопроводность среды.

Преимущество пользования числом K_h вместо Nu заключается в том, что оно имеет в потоке более постоянное значение, и также в том, что оно более непосредственно получается из эксперимента.

Вычислив баланс теплопередачи через отрезок l в трубе круглого сечения, можно показать, что K_h равно:

$$K_h = \frac{T_{m_2} - T_{m_1}}{T_m - T_1}\,\frac{r}{2l}, \tag{6}$$

где T_{m_1} и T_{m_2} — средние температуры потока в начале и в конце рассматриваемого отрезка трубы.

На основании большого числа измерений, сделанных рядом исследователей, установлено следующее выражение для определения Nu в турбулентном потоке

$$\mathrm{Nu} = 0{,}024\,\mathrm{Re}^{0{,}80}\,\mathrm{Pr}^{0{,}4}\,. \tag{7}$$

Это простое выражение широко используется в технике для большого диапазона чисел Re и Pr и дает вполне удовлетворительные результаты [1,8].

Согласно выражению (3), для числа теплопередачи получаем следующее эквивалентное выражение:

$$K_h = 0{,}024\,\mathrm{Re}^{-0{,}20}\,\mathrm{Pr}^{-0{,}63}\,. \tag{8}$$

Еще Рейнольдс указал, что в турбулентном потоке перенос количества движения и тепла совершается флюктюациями скорости; поэтому при движении текучей среды между потерями на трение и теплопередачей должна существовать связь. В последнее время, в связи с более глубоким пониманием явлений в граничном слое, ряд начатых Прандтлем теоретических работ устанавливает связь между K_h и величинами, выражающими сопротивление движению текучей среды при турбулентном режиме.

Тэйлор и Прандтль [2], на основании предположения о существовании вязкостного подслоя, дали следующее выражение для K_h:

$$\frac{1}{K_h} = \frac{2}{\gamma} + A\,(\mathrm{Pr} - 1)\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\,, \tag{9}$$

где γ — так называемый коэффициент сопротивления, который определяет величину тангенциального напряжения τ_0 граничной стенки трубы согласно следующему выражению:

$$\tau_0 = \rho\,\frac{U_m^2}{2}\,\gamma. \tag{10}$$

Числовой коэффициент A в выражении (9) определяется полуэмпирически и дается авторами равным 5,6.

Сравнение величины K_h, вычисленной из (9), с опытными данными не дает хорошего совпадения при значении Pr более 10. Это показывает, что вид функциональной зависимости K_h от Pr менее удачен, чем в простом эмпирическом выражении (8).

Карман [3] развил работы Тэйлора и Прандтля, учитывая еще теплопередачу в переходном турбулентном слое, и получил следующее выражение для K_h:

$$\frac{1}{K_h} = \frac{2}{\gamma} + 5\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\left\{(\mathrm{Pr} - 1) + \ln\left[1 + 0{,}83\,(\mathrm{Pr} - 1)\right]\right\}. \tag{11}$$

Это сложное выражение имеет ту же форму функции, что и предыдущее, но, благодаря добавочному логарифмическому члену, дает совпадение, в пределах точности измерений, до величины Pr порядка 100 так же хорошо, как и простое по форме эмпирическое выражение. Противоречию между выборами формы функции эмпирических и теоретических выражений для теплопередачи, не оправданному запросами точности экспериментальных данных, следовало бы уделить внимание.

В данной заметке будет указан возможный путь получения простого эмпирического выражения для K_h из теоретических соображений.

Основой для сравнения между собой вязкостных и тепловых явлений в потоке является общность в обоих явлениях „фактора перемешивания" $\overline{vl}$, представляющего собой среднее по времени произведение пульсации скорости v, перпендикулярной к стенке, и пути смешения l.

Обозначим координату, перпендикулярную к стенке, через y, тогда количество тепла, переносимое через единицу поверхности за единицу времени через плоскость, параллельную граничным стенкам трубы, будет

$$Q = (k + c\rho\overline{vl})\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{12}$$

где k — обычная теплопроводность, а $c\rho\overline{vl}$ — виртуальная теплопроводность.

Тангенциальное напряжение в рассматриваемой плоскости параллельных стенок обозначим τ; на основании гипотезы Прандтля о переносе количества движения, оно равно:

$$\tau = (\mu + \rho\overline{vl})\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{13}$$

где μ — обычная вязкость, а $\rho\overline{vl}$ — виртуальная вязкость. Видно, что выражения (12) и (13) между собой очень сходны.

Из опытов известно, что при турбулентном движении основной перепад температур и скорости происходит у самой стенки трубы, и, мы полагаем, что он происходит на таком малом по сравнению с диаметром трубы расстоянии a, что можно считать, что на этом расстоянии Q и τ остаются постоянными и равны тем величинам Q_0 и τ_0, которые они имеют у самой границы. Тогда из выражения (12): используя значения K_h и α из выражений (1) и (2) и вводя значение величины Pr (5), имеем:

$$(T_m - T_1)K_h \Pr U_m = \nu\left(1 + \Pr\frac{\overline{vl}}{\nu}\right)\frac{\partial T}{\partial y}, \quad y < a. \tag{14}$$

В выражение (13) вводим вместо τ его значение у стенки τ_0 (10) и получаем:

$$U_m^2\frac{\gamma}{2} = \nu\left(1 + \frac{\overline{vl}}{\nu}\right)\frac{\partial U}{\partial y}, \quad y < a. \tag{15}$$

Из сравнения этих выражений видно, что при $\Pr = 1$, каков бы ни был закон изменения $\overline{vl}$ у стенки в рассматриваемом слое a, между $\partial T/\partial y$ и $\partial U/\partial y$ есть простое соотношение:

$$\frac{(T_m - T_1)K_h}{U_m\gamma/2} = \frac{\partial T/\partial y}{\partial U/\partial y}, \quad \Pr = 1, \quad y < a. \tag{16}$$

Так как слева стоит постоянная величина, то, следовательно, температурный напор $T_m - T_1$ и скорость U возрастают подобно друг другу. Если принять, что основная величина перепада происходит в слое толщиной a, то можно положить, что отношение производных равно отношению средних величин, и тогда получим простое выражение

$$K_h = \gamma/2 \quad P_r = 1 \tag{17}$$

Это известный результат, который получается обычно несколько иным путем, непосредственно из „аналогии Рейнольдса“ (4), и он совпадает с выражениями Тейлора, Прандтля (9) и Кармана (11), когда $\Pr = 1$.

Интересно отметить, что экспериментально (5) при $\Pr = 1$ распределение скорости и температурный напор оказываются подобными не только в пограничном слое, но довольно близко совпадают и по всему сечению трубы, хотя этого можно было ожидать только в пограничном слое.

Основная трудность нахождения величины K_h возникает при числах Pr, не равных единице. Тогда для сравнения выражений (14) и (15) нужно знать, как фактор смещения $\overline{vl}$ меняется в зависимости от расстояния от стенки.

Как отметил Прандтль, у стенки можно считать, что величина $\overline{vl}$ определяется, в первую очередь, теми процессами, которые происходят непосредственно у ее поверхности; это дает возможность принять, что в рассматриваемом слое толщиной a она зависит только от расстояния и градиента скорости, откуда и получаем:

$$\overline{vl} = Cy^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \tag{18}$$

где C есть постоянная величина. Казалось бы, что, определив экспериментально $\partial U/\partial y$ как функцию y средней скорости U_m и числа Рейнольдса, можно было бы экспериментально найти закон изменения $\overline{vl}$ у стенки, но на самом деле это встречает большие технические трудности. Из данных по измерению распределения скоростей при турбулентном движении видно, что даже при сравнительно небольших числах Рейнольдса на расстояниях, равных 2 — 3% от радиуса трубы, уже происходит основной перепад скорости, и она уже достигает величин, превосходящих половину ее максимального значения; то же, конечно, происходит с перепадом температуры.

Следовательно, величина слоя, к которому относятся выражения (14) и (15) и в котором происходит основной перепад скорости и температуры, составляет всего несколько процентов от поперечного размера трубы. 2—3% радиуса трубы в обычных опытах соответствуют слою даже при наибольших трубах (10 см диаметром), которые применялись для исследования, только 1—2 мм. Найти распределение скорости в такой малой толщине, чтобы можно было надежно вычислить еще и ее производную по расстоянию и найти закон изменения этой производной с расстоянием, применяемыми методами еще не представлялось возможным.

Поэтому, чтобы выйти из этого затруднения, обычно рассматривают пограничный слой, разделив его на две части. Одну, в которой принимается $\overline{vl} = 0$, с чисто ламинарным движением; его называют ламинарным подслоем и в нем считают, что теплопроводность всецело определяется молекулярной теплопроводностью k. Далее следует слой, имеющий только турбулентную теплопроводность. Граница между этими слоями определяется более или менее произвольной константой (A в выражении (9)). Этим методом рассмотрения задачи и определяется вид функции в выражениях (9) и (11). Такое деление на два слоя, повидимому, мало оправдано. Опытные исследования флюктуаций у стенок труб, произведенные Фейджем и Таунендом [6], показывают, что флюктуации даже при небольших числах Рейнольдса уже существуют у самой стенки, довольно быстро растут и потом остаются почти постоянными по всему сечению трубы. Таким образом, существования строго выраженного ламинарного подслоя в трубах экспериментально не обнаружено.

Поэтому нам казалось бы более естественным сделать другое, тоже гипотетическое, предположение о величине $\overline{vl}$ у стенки, соответствующее его непрерывному росту от самой границы.

Для выяснения поведения скорости и ее производной в близких от стенки слоях толщиной a можно с достаточной достоверностью принять, что, во всяком случае, эти величины должны удовлетворять трем условиям:

П е р в о е: на границе у самой стенки величина флюктуации обязательно равна нулю, поэтому градиент скорости определяется обычной вязкостью, следовательно:

$$\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{U_\tau^2}{\nu}, \tag{19}$$

где U_τ — так называемая динамическая скорость, определяющаяся из

$$\tau_0 = \rho U_\tau^2. \tag{20}$$

Второе: согласно предположению Прандтля и как это было показано Никурадзе [7], величина U/U_τ в ссматриваемом слое должна быть функцией только величины $U_\tau y/\nu$, тогда имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_\tau^2}{\nu} f\left(\frac{U_\tau y}{\nu}\right). \tag{21}$$

Третье: предположение, что на расстоянии a от стенки, но все еще в зоне, где τ можно рассматривать как постоянную величину, но где уже скорость U поддается измерению, она должна переходить в функцию от расстояния, определяемую эмпирически, например достаточно хорошо совпадающим с опытом степенным законом

$$\frac{U}{U_\tau} \sim \left(\frac{U_\tau y}{\nu}\right)^n \quad y \geqslant a. \tag{22}$$

Подставляя выражение для градиента скорости, удовлетворяющее этим трем условиям, в выражение (18), можно, например, написать его в следующем виде:

$$\overline{vl} = \frac{U_\tau^2}{\nu} \frac{Cy^2}{1 + B\left(\frac{U_\tau y}{\nu}\right)^{1-n}}. \tag{23}$$

Это выражение, включающее неизвестную функцию f, нужно рассматривать, как сугубо приближенное, так как нет никаких оснований считать, что величина B и показатель n в слое a остаются все время постоянными. Главное значение этого выражения для нашей задачи заключается в том, что в слое a изменение фактора перемешивания $\overline{vl}$ в основном можно считать пропорциональным квадрату динамической скорости.

Сравним теперь выражения (14) и (15) при $\Pr \neq 1$. Видно, что при этом в слое a изменение величины температурного напора $T_1 - T$ по оси y не будет соответствовать изменению скорости U, но можно предположить, что распределение $T_1 - T$ по y будет соответствовать распределению скорости U' в той же трубе при режиме с течением с другой средней скоростью U'_m. Для этого нужно, чтобы в рассматриваемом слое a при этих двух режимах имелось равенство:

$$1 + \Pr\frac{\overline{vl}}{\nu} = 1 + \frac{\overline{vl'}}{\nu}, \quad y < a, \tag{24}$$

где $\overline{vl'}$ есть фактор смешения для потока со средней скоростью U'_m. Обозначим коэффициент сопротивления для этого потока через γ'. Если условие (24) соблюдено, тогда из (14) и (15) получаем, считая попрежнему, что в основном весь перепад скорости и температур происходит в слое a:

$$K_h = \frac{1}{\Pr}\frac{\gamma'}{2}\frac{U'_m}{U_m}, \quad y < a. \tag{25}$$

Если принять, что для выполнения равенства (24), согласно выражению (23) в слое a, в первую очередь фактор смешения определяет значение величины числителя, получаем:

$$\mathrm{Pr}\, U_{\tau}^{2} = U_{\tau}^{\prime 2}. \tag{26}$$

Так как γ есть функция числа Re, то его можно написать в следующем виде:

$$\gamma = \lambda\, \mathrm{Re}^{-p}. \tag{27}$$

Тогда из выражений (10), (20), (25), (26) и (27) простой подстановкой получим:

$$K_h = \frac{\lambda}{2} \mathrm{Re}^{-p}\, \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{1-p}}. \tag{28}$$

Если для закона сопротивления (27) взять выражение Блазиуса:

$$\gamma = 0{,}0791\, \mathrm{Re}^{-0{,}25}, \tag{29}$$

тогда для K_h имеем:

$$K_h = 0{,}0396\, \mathrm{R}^{-0{,}25}\, \mathrm{Pr}^{-0{,}57}. \tag{30}$$

Сравнивая это выражение с эмпирическим (8), видим, что они по структуре одинаковы, числовой коэффициент у нашего несколько больше, но больше и отрицательный показатель у Re. Показатель же числа Pr практически равен эмпирическому. Если сравнить численные значения для K_h, вычисленные по обоим выражениям, то получаем, что в пределах Re до $5 \cdot 10^4$, в которых справедливо выражение Блазиуса, разница в показателях компенсирует разницу в коэффициентах, и оба выражения дают, практически, одинаковые величины для числа теплопередачи K_h.

Этот результат весьма удовлетворителен, так как выражение (30) не содержит ни одного произвольного коэффициента. Надо отметить, что это совпадение несколько неожиданно, так как вывод надо считать содержащим ряд допущений, которые справедливо можно подвергнуть критике.

Для сравнения выражения (30) непосредственно с опытными данными приводим из статьи Лоренца [8] сводку данных большого количества измеренных величин K_h (см. рисунок), которые служили для проверки выражений Прандтля и Тэйлора (9) и Кармана (11). Сравнения произведены для трех чисел Re как функции числа Pr, для которых даны экспериментальные значения K_h. Кривые для выражения (30) проведены жирными сплошными линиями, которые в логарифмической шкале являются параллельными прямыми. Как по абсолютному значению K_h, так и по зависимости от числа Pr совпадение в пределах разброса точек можно считать удовлетворительным. В особенности хорошо совпадение при большом Re, как это можно было ожидать, так как в этом случае перепад температур происходит в более тонком слое у стенки трубы и основные допущения при выводе более приемлемы. На диаграмме видно, что экспериментальные данные сильно разбросаны, в особенности при большом значении Pr. Наиболее тщательными измерениями надо считать измерения Игла и Фергюсона [9]; они их производили в области Pr от 3 до 10, и их данные проведены сплошными линиями, эти данные тоже хорошо согласуются с вычислениями по выражению (30).

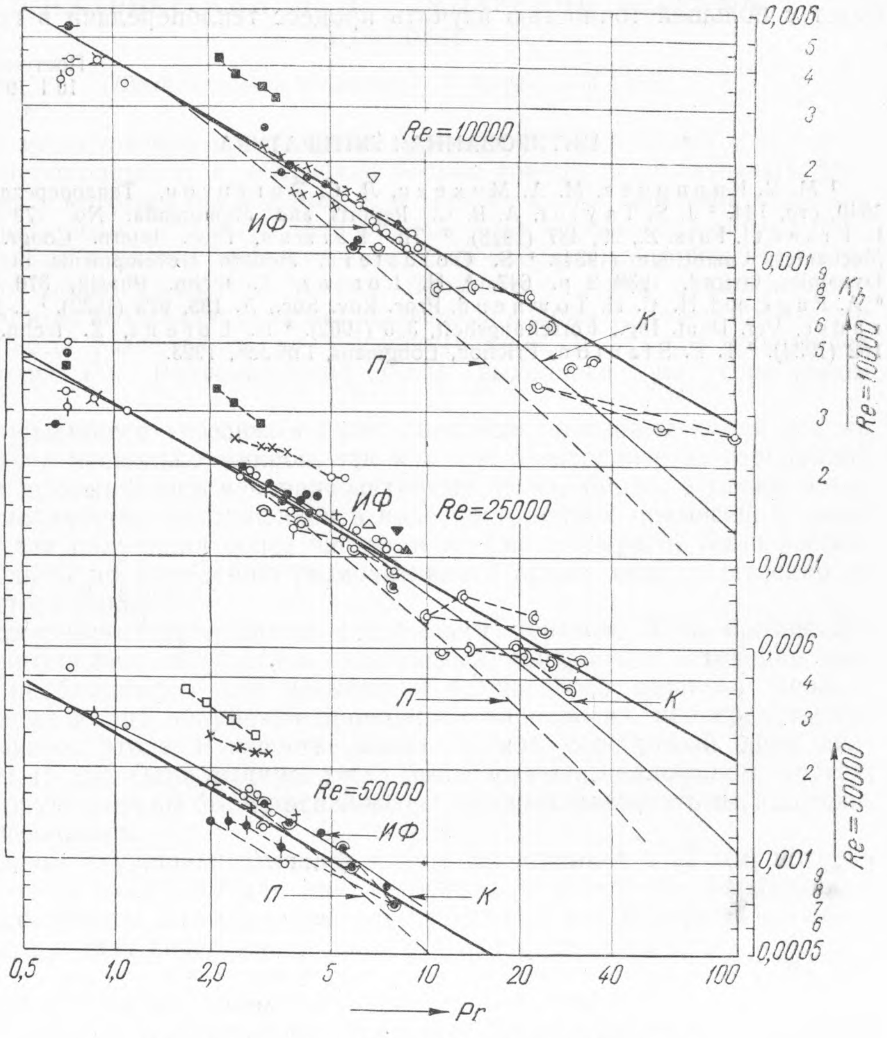
Разброс экспериментальных точек настолько велик, что для практики, без ущерба для необходимой точности вычисления, можно округлить коэффициент в выражении (30), тогда получим:

$$K_h = 0{,}04\,\mathrm{Re}^{-0{,}25}\,\mathrm{Pr}^{-0{,}6}. \tag{31}$$

Для области высоких рейнольдсов, где выражение Блазиуса (29) мало пригодно, в выражении (31) можно написать:

$$K_h = \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{Pr}^{-0{,}6}, \tag{32}$$

а величину γ коэффициента сопротивления брать непосредственно из хорошо известных экспериментальных кривых для этой величины.



К — Карман, *П* — Прандтль, *ИФ* — Игль и Фергюсон

Стантон(⁹) наблюдал в шероховатых трубках повышение значения γ_s одновременно с величиной K_h. Это происходит благодаря увеличению турбулентности граничного слоя и, следовательно, фактора смещения. Известно, что тогда γ_s больше не зависит от числа Рейнольдса, следовательно, p в выражении (27) равно нулю. Поэтому для шероховатых труб можно ожидать, что при всех рейнольдсах получаем:

$$K_h = \frac{\gamma_s}{2} \mathrm{Pr}^{-0,5}. \tag{33}$$

Этот результат, конечно, подлежит экспериментальной проверке.

Основой для вывода выражения (30) является то, что фактор перемешивания в пограничном слое мы считаем, в основном, пропорциональным, согласно (23), квадрату динамической скорости. Справедливость этого допущения можно считать доказанной, только подвергнув более тщательному экспериментальному изучению тепловые и скоростные процессы, происходящие у самой стенки потока. Повидимому, только преодолев экспериментальные трудности этих исследований, можно будет с большей точностью изучить процесс теплопередачи в трубах.

Поступило
10 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Кирпичев, М. А. Михеев, Л. С. Эйгенсон, Теплопередача, М. 1940, стр. 144. [2] J. S. Taylor, A. R. C. Reports and Memoranda. No. 272 (1919). L. Prandtl, Phys. Z., 29, 487 (1928). [3] Th. Karman, Proc. Intern. Congr. Appl. Mechanics, Cambridge (1934). [4] S. Goldstein, Modern Developments in Fluid. Dynamics, Oxford, 1938, 2. p. 647. [5] H. Lorenz, Z. techn. Physik, **376** (1934). [6] A. Fage and H. C. H. Townend, Proc. Rov. Soc., A. **135**, 675 (1932). [7] J. Nikuradse, Ver. Deut. Ing., Forschungsheft, 356 (1902). [8] H. Lorenz, Z. techn. Phys. **162** (1934). [9] T. E. Stanton, Friction, Longmans, London, 1923.