Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

К ТЕОРИИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

Пусть E — линейное сепарабельное пространство типа (B) и

$$\{x_i\}; \qquad \{F_i\} \tag{1}$$

биортогональная система в E (т. е. $F_i(x_j) = \delta_{ij}$).

Последовательность $\{x_i\}$ называется полной в E, если замкнутая линейная оболочка над $\{x_i\}$ совпадает с E. Последовательность $\{F_i\}$ называется тотальной, если из соотношения $F_i(x) = 0$ $(i=1, 2,\ldots)$ следует $x = \theta$ (θ — нулевой элемент в F). Заметим, что если E — регулярно, то из тотальности $\{F_i\}$ следует полнота этой последовательности в $\overline{E}$ (т. е. сильно замкнутая в $\overline{E}$ линейная оболочка над $\{F_i\}$ совпадает с $\overline{E}$).

Известно ([1]), что во всяком сепарабельном пространстве Банаха существует биортогональная система, в которой $\{x_i\}$ — полная последовательность, а $\{F_i\}$ — тотальная, и, таким образом, во всяком регулярном и сепарабельном пространстве Банаха существует биортогональная система, в которой последовательности $\{x_i\}$ и $\{F_i\}$ являются полными, соответственно, в E и $\overline{E}$. Заметим также, что если $\{x_i\}$ — базис в E, то последовательность $\{F_i\}$ тотальна (обратное неверно). Всюду в дальнейшем мы будем считать, что в биортогональной системе (1) $\{x_i\}$ есть полная последовательность, а $\{F_i\}$ — тотальная.

§ 1. Лемма. *Если последовательность $\{x_i\}$ системы* (1) *не есть базис в E, то существует элемент $x \in E$, удовлетворяющий условиям:* 1°. *Ряд* $\sum\limits_1^\infty F_i(x)\, x_i$ *расходится;* 2°. $\operatorname{Sup}\limits_n \left\| \sum\limits_1^n F_i(x)\, x_i \right\| < \infty$.

Доказательство. Нетрудно показать, что существует последовательность элементов пространства E: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\xi_p = \sum_{m_{p-1}+1}^{m_p} F_i(\xi_p)\, x_i\,; \quad \|\xi_p\| < \frac{1}{2^p};$$

$$\operatorname*{Sup}_{m_{p-1}+1 \leqslant k \leqslant m_p} \left\| \sum_{i=m_{p-1}+1}^{k} F_i(\xi_p)\, x_i \right\| = M_p^* \geqslant 1 \quad (p = 1, 2 \ldots), \quad m_0 = 0$$

Элемент $x=\sum_1^\infty \xi_p/M_p$ удовлетворяет требованиям леммы.

§ 2. Пространство $\mathscr{E}$. Элементы x пространства E, для которых ряды $\sum_1^\infty F_i(x)x_i$ сходятся, образуют линейное многообразие, всюду плотное в E. Введем на этом многообразии новую норму по формуле:

$$\|x\|_* = \operatorname*{Sup}_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum_1^n F_i(x)x_i \right\|.$$

Условимся обозначать полученное таким образом линейное нормированное пространство через $\mathscr{E}$. Кроме того, будем обозначать символом $\lim_*$ предельный переход в $\mathscr{E}$, сохраняя обозначение $\lim$ за операцией предельного перехода в E.

Теорема 1. 1° *$\mathscr{E}$ — полное пространство.* 2° *$\{x_i\}$ — базис* в $\mathscr{E}$.

Пространство $\mathscr{E}_*$. Элементы пространства E, для которых $\operatorname*{Sup}_n \left\|\sum_1^n F_i(x)x_i\right\|<\infty$, образуют линейное многообразие, всюду плотное в E. Введем для элементов этого многообразия норму по той же формуле, что и в пространстве $\mathscr{E}$:

$$\|x\|_* = \operatorname*{Sup}_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum_1^n F_i(x)x_i \right\|.$$

Полученное таким образом линейное нормированное пространство обозначим через $\mathscr{E}_*$. Операцию предельного перехода в $\mathscr{E}_*$ будем обозначать, как и в $\mathscr{E}$, через $\lim_*$. Очевидно, что $\mathscr{E}$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{E}_*$ (именно поэтому мы распространяем на $\mathscr{E}_*$ ранее введенные для $\mathscr{E}$ обозначения нормы и предельного перехода).

Теорема 2. *Если последовательность $\{F_i\}$ системы* (1) *является полной в $\bar{E}$, то $\mathscr{E}_*$ — полное пространство.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что: если $x\in\mathscr{E}_*$, то

$$\|x\|\leqslant\|x\|_*. \tag{2}$$

Пусть $x\in\mathscr{E}_*$. Рассмотрим последовательность: $S_n(x)=\sum_1^n F_i(x)x_i$ $(n=1,2,\ldots)$. Так как $\operatorname*{Sup}_n\|S_n(x)\|<\infty$ и $\lim_{n\to\infty} F_i(S_n(x))=F_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$, то из предположенной полноты $\{F_i\}$ следует, что $\{S_n(x)\}$ слабо сходится в E к элементу x (откуда, конечно, не следует, что она слабо сходится в $\mathscr{E}_*$). Но тогда $\|x\|\leqslant\operatorname*{Sup}_n\|S_n(x)\|=\|x\|_*$. Пусть теперь $\{x^p\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathscr{E}_*$. Вследствие (2) в E существует элемент x^0 такой, что $\lim_{\to\infty} x^p=x^0$, и легко видеть, что $\left\|\sum_1^n F_i(x^0)x_i\right\|\leqslant\operatorname*{Sup}_p\|x^p\|_*$, т. е. $x^0\in\mathscr{E}_*$. Далее, так как $\operatorname*{Sup}_p\left\|\sum_1^p F_i(x^n)x_i-\sum_1^p F_i(x^m)x_i\right\|=\|x^n-x^m\|_*<\varepsilon$ при достаточно больших n и m, то нетрудно убедиться в том, что $\lim_{p\to\infty}{}_* x^p=x^0$.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность* $\{x_i\}$ *системы* (1) *была базисом в* E, *необходимо и достаточно, чтобы пространства* $\mathscr{E}$ *и* $\mathscr{E}_*$ *совпадали.*

Доказательство. Достаточность условия следует непосредственно из нашей леммы. Необходимость очевидна.

Отметим теперь некоторые, важные для дальнейшего, свойства пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_*$.

(a). 1°. Пусть F — линейный функционал на E и пусть φ — функционал на $\mathscr{E}$, определенный формулой: $\varphi(x) = F(x)$, $x \in \mathscr{E}$. Тогда φ — линейный функционал на $\mathscr{E}$. Это следует из (2).

2°. Если последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится в $\mathscr{E}$, то она слабо сходится также и в E.

3°. Биортогональной системе (1) соответствует в пространстве $\mathscr{E}$ биортогональная система $\{x_i\}$; $\{\varphi_i\}$, где $\varphi_i(x) = F_i(x)$.

Так как $\{x_i\}$ — базис в $\mathscr{E}$, то для любого $\varphi \in \overline{\mathscr{E}}$ имеет место представление: $\varphi(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \ldots + b_n\varphi_n(x) + \ldots$, где $x \in \mathscr{E}$.

(b) Пусть теперь последовательность $\{F_i\}$ системы (1) является полной в $\overline{E}$. Тогда

1°. Если F — линейный функционал на E и ψ — функционал на $\mathscr{E}_*$, определенный по формуле $\psi(x) = F(x)$ для $x \in \mathscr{E}_*$, то ψ — линейный функционал на $\mathscr{E}_*$.

Это следует из соотношения (2), которое справедливо в силу полноты $\{F_i\}$.

2°. Если последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится в $\mathscr{E}_*$, то она слабо сходится в E.

3°. Биортогональной системе (1) соответствует в пространстве $\mathscr{E}_*$ биортогональная система $\{x_i\}$; $\{\psi_i\}$, где $\psi_i(x) = F_i(x)$, $x \in \mathscr{E}_*$ ($i = 1, 2, \ldots$). Очевидно, что если $x \in \mathscr{E}$, то $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$.

Отметим еще, что, если пространства $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_*$ не совпадают, то последовательность $\{x_i\}$ не может быть полной в $\mathscr{E}_*$ (так как $\mathscr{E}$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{E}_*$).

§ 3. В этом параграфе будет предположено, что последовательность $\{F_i\}$ системы (1) является полной в $\overline{E}$. Вследствие этого, а также замечания (b) 1°, функционалы ψ_i ($i = 1, 2, \ldots$), определенные в (b) 3°, линейны.

Теорема 4. *Если* $\{\psi_i\}$ *есть полная последовательность в* $\overline{\mathscr{E}}_*$, *то* $\{x_i\}$ — *базис в* E.

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{E}_*$. Рассмотрим последовательность $S_n(x) = \sum\limits_1^n F_i(x) x_i$ ($n = 1, 2, \ldots$). Так как $x \in \mathscr{E}_*$, то эта последовательность ограничена в E и в $\mathscr{E}_*$. Далее, $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_i(S_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} F_i(S_n(x)) = F_i(x) = \psi_i(x)$, и вследствие полноты $\{\psi_i\}$ в $\mathscr{E}_*$ последовательность $\{S_n(x)\}$ слабо сходится к x в $\mathscr{E}_*$. Но тогда элемент x принадлежит замкнутой линейной оболочке над $\{S_n(x)\}$, а поэтому $x \in \mathscr{E}$, так как $S_n(x) \in \mathscr{E}$ для любого n. Таким образом, $\mathscr{E}_*$ совпадает с $\mathscr{E}$ и (теорема 3) последовательность $\{x_i\}$ есть базис в E.

Теорема 5. *Если* $\mathscr{E}$ — *регулярно, то* $\{x_i\}$ — *базис в* E.

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{E}_*$; $S_n(x) = \sum\limits_1^n F_i(x) x_i$ ($n = 1, 2, \ldots$) и пусть $\{\varphi_i\}$ — последовательность функционалов, определенных в замечании (a) 3°. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_i (S_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} F_i (S_n(x)) = F_i (x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Далее, так как $\mathscr{E}$ регулярно и $\{x_i\}$ — базис в $\mathscr{E}$ (теорема 1), то $\{\varphi_i\}$ — базиз в $\overline{\mathscr{E}}$ ([2]) и, таким образом, $\{\varphi_i\}$ — полная последовательность в $\overline{\mathscr{E}}$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(S_n(x))$ существует для любого $\varphi \in \overline{\mathscr{E}}$. Так как $\mathscr{E}$ регулярно, то существует такой элемент $x' \in \mathscr{E}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(S_n(x)) = \varphi(x')$ для любого $\varphi \in \overline{\mathscr{E}}$. Но тогда, в частности, будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_i (S_n(x)) = \varphi_i (x') = F_i (x')$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и, таким образом, $F_i (x') = F_i (x)$, откуда $x' = x$ и, следовательно, $x \in \mathscr{E}$. Мы доказали, что $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_*$ совпадают, а значит (теорема 3), $\{x_i\}$ — базис в E.

§ 4. Пусть теперь E — регулярное пространство. Как уже было отмечено, во всяком регулярном пространстве существует биортогональная система $\{x_i\}$; $\{F_i\}$, в которой $\{x_i\}$ и $\{F_i\}$ — полные последовательности, соответственно, в E и $\overline{E}$. Пусть (1) — такая система в E.

Рассмотрим пространство $\mathscr{E}$. Пусть $\Phi(\varphi)$ — линейный функционал, определенный на $\overline{\mathscr{E}}$, т. е. $\Phi \in \overline{\overline{\mathscr{E}}}$. На основании известной теоремы ([3]), в $\mathscr{E}$ существует слабо сходящаяся последовательность элементов $\{\xi_n\}$ такая, что $\Phi(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\xi_n)$. В силу замечания (a) 2° эта последовательность слабо сходится и в E, а так как E регулярно, то существует элемент $x_0 \in E$, к которому эта последовательность слабо сходится в E. Легко видеть, что элемент x_0 содержится в $\mathscr{E}_*$.

Таким образом:

α) Последовательность $\{\xi_n\}$ слабо фундаментальна в $\mathscr{E}_*$ (т. е. является последовательностью Коши в смысле слабой сходимости в $\mathscr{E}_*$). Это следует из того, что $\mathscr{E}$ есть подпространство в $\mathscr{E}_*$.

β) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_i (\xi_n) = \psi_i (x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

γ) ψ_i — тотальная последовательность.

δ) Если $\psi \in \overline{\mathscr{E}}_*$ и $x \in \mathscr{E}$, то $\psi(x) = \sum\limits_1^\infty b_i \psi_i (x)$ (см. (a) 3°) (так как, если $x \in \mathscr{E}$, то $\psi_i (x) = \varphi_i (x)$ и $\psi(x) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — линейный функционал на $\mathscr{E}$).

Легко видеть, что если из условий α), β), γ), δ) следует, что для всякого $\psi \in \overline{\mathscr{E}}_*$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(\xi_n) = \psi(x_0)$, то $\{x_i\}$ — базис в E.

В самом деле, так как $\xi_n \in \mathscr{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\{\xi_n\}$ слабо сходится в $\mathscr{E}_*$ к элементу x_0, то $x_0 \in \mathscr{E}$. Но тогда $\Phi(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\xi_n) = \varphi(x_0)$ и тем самым доказана регулярность $\mathscr{E}$, а поэтому, в силу теоремы 5, $\{x_i\}$ — базис в E.

Поступило
23 V 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, ДАН, 41, № 6 (1943). [2] S. Banach, Theorie des operations linéaires, p. 107. [3] I. Gelfand, Математ. сб., 4 (46), № 2 (1938).