Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 7

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЮСТЕРНИК, член-корреспондент АН СССР, и А. М. ПРОХОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ RC

Задача определения собственных значений и функций для операторов сводится при численном решении (например методом сеток) к нахождению собственных значений и собственных векторов аппроксимирующих матриц

$$Ay + \lambda y = 0. \tag{1}$$

В данной работе описан способ численного решения этой задачи с помощью электрической схемы для некоторого класса симметрических матриц A, аппроксимирующих операторы Штурма — Луивилля, позитивные симметрические операторы Фредгольма и т. п.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — соответствующие им собственные векторы матрицы A, u^j означает j-ю компоненту вектора u. Пусть все $\lambda_i > 0$ и $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

Рассмотрим, наряду с (1), дифференциальное векторное уравнение

$$Ay = k\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

Общее решение (2) имеет вид:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i e^{-\frac{\lambda_i}{k}t}, \tag{3}$$

причем $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Если $c_1 \neq 0$, то член $c_1 y_1 e^{-\frac{\lambda_1}{k}t}$ стремится к нулю медленнее остальных членов правой части (3), и поэтому при больших t

$$y(t) \approx c_1 y_1 e^{-\frac{\lambda_1}{k}t}. \tag{4}$$

Аналогично, если $c_1 = 0$, но $c_2 \neq 0$, то при $t \to \infty$

$$y(t) \approx c_2 y_2 e^{-\frac{\lambda_2}{k}t}. \tag{5}$$

Такое асимптотическое поведение $y(t)$ будет иметь место в том случае, если начальный вектор $y(0)$ ортогонален к y_1.

Пусть матрица A такова, что уравнение $Ay = f$ можно моделировать как связь между напряжениями y^j и токами f^j в некоторой цепи, состоящей из активных сопротивлений. Тогда уравнение (1) можно моделировать цепью, состоящей из активных сопротивлений и емкостей.

Рассмотрим в качестве примера задачу на нахождение собственных значений уравнения Штурма — Луивиля $[R(x)y'(x)]' - p(x)y(x) = \lambda y(x)$ при краевых условиях $y(a) = y(b) = 0$. Пусть $R(x) > 0$. Можно считать, что $p(x) > 0$ при $a < x < b$ (для этого достаточно добавить к $p(x)$ некоторую константу c, от чего собственные значения λ заменяются на $\lambda - c$, а собственные функции не изменяются). Разбив интервал (a, b) на n частей длины h и обозначив $F^j = F(a + jh)$, мы можем аппроксимировать нашу задачу следующей алгебраической задачей

$$R^i(y^{i+1} - y^i) - R^{i-1}(y^i - y^{i-1}) - h^2 p^i y^i = h^2 \lambda y^i. \tag{6}$$

Если y^j есть напряжение в $j = M$ узле сетки, то уравнение

$$R^i(y^i - y^{i+1}) + R^{i-1}(y^i - y^{i-1}) + P^i y^i = k\frac{dy^i}{dt} \quad (P^i = h^2 p^i) \tag{7}$$

моделируется схемой, изображенной на рис. 1 (R^i, P^i — проводимости).

Задавая в узлах нашей цепи начальные напряжения порядка сотен вольт и производя измерения в моменты, когда напряжения выражаются несколькими вольтами, мы получим, что напряжение в узлах

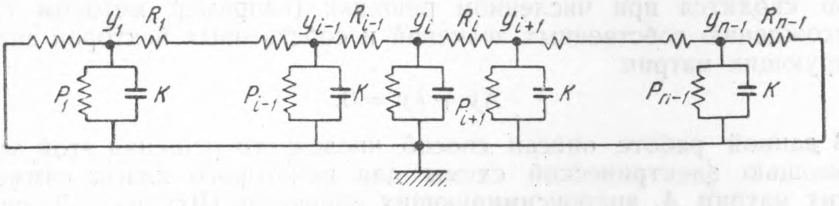

Рис. 1

приближенно пропорционально компонентам первого собственного вектора, а изменение напряжения в каждом узле пропорционально экспоненциальной функции $e^{-\frac{\lambda_1}{k}t}$. Если же начальные напряжения выбраны так, что собственный начальный вектор ортогонален к y_1, то тем же путем придем к собственному вектору y_2 и экспоненте $e^{-\frac{\lambda_2}{k}t}$ и т. д.

Для экспериментов была выбрана цепь, состоящая из одинаковых сопротивлений и емкостей (рис. 2). Для такой цепи матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения λ этой матрицы равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Что касается ее собственных векторов, то, как легко видеть, первый собственный вектор y_1 имеет компоненты (1, 1, 1), второй (1, 0, — 1) и третий (1, — 2, 1).

Для измерения напряжения в узлах была собрана схема, состоящая из одноламповото усилителя постоянного тока, выход которого соединялся с вертикальными отклоняющими пластинами электронно-лучевой трубки (рис. 3). Вход усилителя присоединялся непосредственно к узлам цепи.

Вспомогательный генератор П-образных импульсов напряжения периодически (с частотой 50 герц) задавал начальные напряжения в узлах цепи. Величины сопротивлений и емкостей последней были взяты такими, что емкости за время между двумя импульсами напряжения практически полностью разряжались. Можно было по желанию задавать в узлы как отрицательные, так и положительные импульсы напряжения.

Для измерения скорости спадания напряжения служил генератор, дающий узкие импульсы напряжения („метки времени“) с частотой 3800 герц, синхронизированный с частотой П-образных импульсов.

Метки времени подавались на модулирующий электрод электронно-лучевой трубки, так что электронный пучок запирался 3800 раз в секунду.

При измерении первого собственного значения в узлы *1* и *2* нашей цепи (рис. *2*) подавались П-образные импульсы напряжения около -200 V. К узлу *1* присоединялся вход усилителя. До напряжения около -3 V лампа усилителя заперта и, следовательно, на нагрузочном сопротивлении $R_н$ нет никакого напряжения.

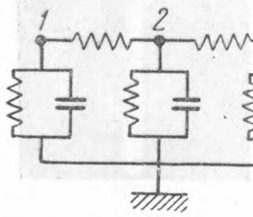

Рис. 2

Рис. 3

Когда напряжение в узле *1* падает до -3 V, через лампу начинает итти анодный ток, возрастающий до тех пор, пока напряжение в *1* не упадет до нуля. Таким образом, усилитель вырезает участок от -3 V до 0, и ход напряжения в этом интервале наблюдается на экране трубки. Поскольку этот процесс периодически повторяется, мы имеем на экране неподвижную картину, причем метки времени делят кривую на экране трубки на части, соответствующие 1/3800 сек.

На рис. 4 приведены фотографии кривых изменения напряжения, снятые при наличии развертки (левый снимок) и без развертки (правый снимок). Измерение скорости спадания производилось по положению нескольких меток времени. Усилитель присоединялся затем к источнику постоянного напряжения, которое менялось с таким расчетом, чтобы получить те же отклонения электронного пучка. Таким образом, каждому положению меток времени можно было сопоставить определенное значение напряжения, измеряемое просто вольтметром. Таким путем находятся все данные для определения наименьшего показателя затухания, а следовательно, и первого собственного значения λ_1.

Для измерения второго показателя затухания (т. е. λ_2) нужно, чтобы первоначальный вектор $y(0)$ был ортогонален к y_1. Для этого необходимо, чтобы в узлах *1* и *3* нашей цепи начальные напряжения были равны по величине и обратны по знаку. Предположим, что в *1* мы даем напряжение $-V_1$, а в *3* напряжение $+V_2$ (V_1 и $V_2>0$).

Усилитель присоединяется к узлу *1* и устанавливается скорость спадания кривой в этом случае. После этого знаки напряжений меняются при неизменных их абсолютных значениях. Усилитель присоединяется при этом к узлу *3*, и снова устанавливается скорость спадания кривой. Если нет полной ортогональности ($V_1 \neq V_3$), то полученные две скорости убывания в *1* и *3* в одинаковые моменты времени будут различными. Меняя величину V_1 или V_2, можно добиться того, чтобы скорости убывания для *1* и *3* при таком переключении не менялись. Очевидно, это будет соответствовать ортогональности начального вектора $y(0)$ к y_1.

Наши измерения дали для первого собственного значения $\lambda_1=1{,}03$, а для второго $\lambda_2 = 2,02$. Ошибка измерения составляет не больше 3—5% и может быть сделана еще меньше.

Описанный способ определения собственных значений прост и легко осуществим. Столь же легко можно получать и компоненты собственных векторов. Для этого необходимо давать лишь одну метку времени за время одного цикла, причем эти метки также должны быть синхронизированы с частотой П-образных импульсов.

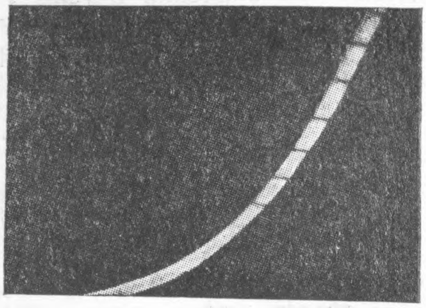

Рис. 4а

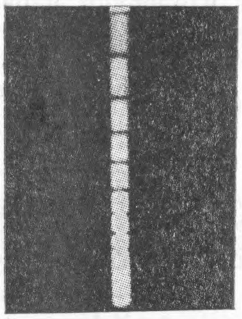

Рис. 4б

Присоединяя усилитель к какому-либо узлу нашей цепи, мы передвигаем тогда эту метку в интересующую нас область кривой в интервале (0, —3V). Переключая затем усилитель к соседнему узлу, мы получим эту метку в другом месте: ниже, если компонента рассматриваемого вектора в этом узле меньше, чем в предыдущем, и наоборот. Зная положение меток, можно найти вышеописанным способом отношение этих двух составляющих рассматриваемого вектора, а проходя по всем узлам цепи,— все его компоненты.

Конечно, нет необходимости измерять напряжение, начиная с 3V. Измерение скорости убывания в моменты, когда напряжение достигнет долей вольта, резко повысит эффективность такого способа.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность профессору С. М. Рытову за проявленное внимание к этой работе и содействие при ее выполнении.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР и
Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
31 XII 1946