Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 7

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ГАУССОВУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 X 1946)

1. Пусть ряд независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ имеет законы распределения $F_j(x)$, математические ожидания $E(X_j)=0$, абсолютные третьи моменты $\beta_{3j}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF_j(x)<\infty$ и дисперсии σ_j^2.

Пусть $S_N^2=\sigma_1^2+\ldots\sigma_N^2\neq 0$, начиная с некоторого N, и пусть $L_N=\frac{1}{S_{3N}}\sum\limits_{j=1}^{N}\beta_{3j}$ — отношение, введенное А. М. Ляпуновым.

Как известно, закон распределения нормированной суммы $Z_N=\frac{X_1+\cdots+X_N}{S_N}$ $\overline{F}_N(x)$ равномерно стремится к гауссову закону $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy$, если величина $L_N\to 0$. Эта известная теорема А. М. Ляпунова получила уточнение в работах A. C. Berry (1) и C. G. Eseen (2) (1941 и 1945 гг.)

В частности, в работе (2) доказано, что $\frac{|\overline{F}_N(x)-G(x)|}{L_N}\leqslant C_0$. Здесь C_0 — некая абсолютная константа, причем $C_0\geqslant 1/\sqrt{2\pi}$. В работе (2) сообщается, что $C_0\leqslant 7{,}5$. Кроме того, работа (2) ставит вопрос об изучении структуры схем случайных независимых величин, обнаруживающих стремление к наибольшему в некотором смысле уклонению от нормального распределения среди всех схем под определенными условиями и дает основание выделить в этом смысле симметрическую схему Бернулли («бросание монеты») среди всех симметрических схем.

В настоящей работе на величины X_j накладываются более жесткие условия, чем в (1) и (2), но зато получаются гораздо более точные результаты. В частности, роль схемы Бернулли выделяется довольно прозрачно.

1. Пусть $\Psi_0(N)$, $\Psi_1(N), \ldots$ — фиксированные заранее монотонно возрастающие до бесконечности функции. Независимые величины $X_1, X_2, \ldots, X_N$, помимо высказанного в п. 1, подчиним дополнительным ограничениям

I.
$$S_N^2=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_N^2\leqslant C_1 N, \tag{1}$$

$$\sigma_j^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF_j(x)\geqslant C_1^3 \quad (j\leqslant N), \tag{2}$$

причем допускаются исключения, но не более чем для $N/\Psi_0(N)$ индексов.

$$L_N \leqslant \frac{1}{\Psi_1(N)}; \tag{3}$$

II.
$$\frac{1}{A_{3N}} \sum_{j=1}^{N} R_j^{(N)} \leqslant \frac{1}{\Psi_2(N)},$$

где

$$R_j^{(N)} = \int\limits_{|x| \geqslant S_N/\Psi_3(N)} |x|^3 \, dF_j(x), \quad A_{3N} = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3 \, dF_j(x).$$

III.
$$\int\limits_{|x| \leqslant L_N^{1-\eta_0}} dF_j(x) \leqslant \frac{1}{\Psi_4(N)}. \tag{4}$$

Здесь снова допустимо $\leqslant N/\Psi_0(N)$ исключений из (4).

При этих условиях имеем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если все X_j, помимо того, еще симметрично распределены, то при любом фиксированном M и $|x| \leqslant M$*

$$\frac{\overline{F}_N - G(x)}{L_N} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + \varepsilon_N(M)), \tag{5}$$

где $\varepsilon_N(M) \to 0$ при $N \to \infty$ и зависит только от N, M и выбора функций $\Psi_0(N), \ldots, \Psi_4(N)$.

Точность теоремы 1 поясняется следующим замечанием: для симметрической схемы Бернулли, когда все $F_j(x)$ имеют вид $F_j(x) = 0$ $(x < -1)$; $F_j(x) = 1/2$ $(-1 < x < 1)$; $F_j(x) = 1$ $(x > 1)$; $L_N = 1/\sqrt{N}$, существует ряд точек $x_{\nu N}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ таких, что расстояние соседних точек $x_{\nu+1, N} - x_{\nu N} = o(1)$ при $N \to \infty$; $x_{\nu N} \to \pm\infty$ при $\nu \to \pm\infty$, и

$$\frac{|\overline{F}_N(x_\nu N) - G(x_\nu N^2)|}{L_N} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2_\nu N/2} (1 - \varepsilon_N),$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, схема Бернулли дает среди всех симметрических схем в некотором смысле наибольшее уклонение от нормального распределения.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 существует ряд точек $\zeta_{-k}^{(N)}, \zeta_{-k+1}^{(N)}, \ldots, \zeta_{-1}^{(N)}$ $\zeta_0^{(N)}, \zeta_1^{(N)}, \ldots, \zeta_l^{(N)}$ таких, что*

$$\zeta_{\nu+1}^{(N)} - \zeta_\nu^{(N)} = q_N; \quad |M - \zeta_l^{(N)}| \leqslant q_N; \quad |-M - \zeta_{-k}^{(N)}| \leqslant q_N, \tag{6}$$

где

$$\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \leqslant q_N \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N, \tag{7}$$

для которых

$$\frac{|\overline{F}_N(\zeta_\nu^{(N)}) - G(\zeta_\nu^{(N)})|}{L_N} < \varepsilon_N'; \tag{8}$$

$\varepsilon_N' \to 0$ равномерно по всем допустимым системам $\{X_j\}$.

Далее, для любого x с $|x| < M$ имеем

$$\int\limits_{x}^{x+q_N} (\overline{F}_N(x) - G(x)) \, dx \leqslant C_2 L_N \frac{q_N}{\Psi_6(N)}. \tag{9}$$

Таким образом, существует сетка равноудаленных значений $\zeta_{\nu}^{(N)}{}_{N}$, где законы $\bar{F}(x)$ и $G(x)$ должны сближаться более тесно, чем в общем случае.

Следует отметить, что теорема 1 может быть выведена геометрическим путем из (8) и (9).

Теорема 3. *Если $\{x_j\}$ не все симметрически распределены, то наложим еще условия:*

IV. $$\int\limits_{x>0} dF_j(x) = \frac{1}{2} \quad (j \leqslant N).$$

V. $$\int\limits_{0}^{\infty} x^2\, dF_j(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_j(x),$$

причем из IV и V возможны исключения, но не более чем для $N/\Psi_0(N)$ индексов.

Тогда, полагая $H_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1-x^2)\Lambda_N$, *где*

$\Lambda_N = = \frac{1}{S_N{}^3} \sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3\, dF_j(x)$, *будем иметь соотношение* (5) *теоремы* 1, *с заменой* $\bar{F}_N(x) - G(x)$ на $\bar{F}_N(x) - G(x) - H(x)$.

Теорема 4. *Существуют точки ζ_{ν}^{N}, определяемые как в теореме 2, такие, что* $\frac{|\bar{F}_N(x) - G(x) - H_N(x)|}{L_N} < \varepsilon'_N$; $\varepsilon'_N \to 0$ *равномерно по системам $\{X_j\}$.*

Далее, при $|x| \leqslant M$

$$\int\limits_{x}^{x+q_N} (\bar{F}_N(x) - G(x) - H_N(x))\, dx \leqslant C_2 q_N L_N \frac{1}{\Psi_6(N)},$$

и теорема 3 может быть выведена из теоремы 4 геометрическим путем.

3. Метод доказательства этих теорем есть классический метод характеристических функций, но для получения более точных результатов, при изучении произведения большого числа характеристических функций, применены приемы, введенные в аддитивную теорию чисел акад. И. М. Виноградовым. Таких приемов используется два — классификация значений независимого переменного на интервалы I и II классов и «сглаживание» тригонометрических сумм.

Поступило
14 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. C. Berry, Trans. Am. Math. Soc., 49 (1941). [2] C. G. Essen, Acta Mathem., 77, 1—2 (1945).