Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 7

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VIII 1946)

Пусть R — группа линейных преобразований $y = \alpha x + \beta$ действительной оси, где α — произвольное положительное число, β — произвольное действительное число. В обзорном докладе по теории вероятностей А. Н. Колмогоров поставил следующую проблему: Найти общий вид всех положительно-определенных функций на R и их разложение на элементарные положительно-определенные функции.

Из ([1]) следует, что эта задача эквивалентна нахождению общего вида унитарных представлений R в сепарабельном гильбертовом пространстве и их разложению на неприводимые унитарные представления. В настоящей заметке дается решение этой задачи, полученное попутно авторами при их общих исследованиях по теории унитарных представлений.

Методы, здесь примененные, в своей алгебраической части восходят еще к Фробениусу. При некотором видоизменении изложенный здесь метод может быть применен к любым разрешимым группам Ли. В частности, совершенно аналогично можно найти общий вид унитарных представлений группы K всех преобразований $w = \alpha z + \beta$ комплексной z-плоскости, где α, β — произвольные комплексные числа и $\alpha \neq 0$.

Группа R содержит две следующие коммутативные подгруппы: 1) группу $\mathfrak{T}$ сдвигов $x \to x + \beta$; ее элементы обозначим через t_β; 2) группу $\mathfrak{S}$ растяжений $x \to \alpha x$, ее элементы обозначим через s_α *.

Пусть теперь дано представление группы R в сепарабельном пространстве $\mathfrak{H}$ (отметим, что случай несепарабельного пространства без труда сводится к рассматриваемому разложением в прямую сумму циклических подпространств). Обозначим через T_β и S_α операторы, соответствующие t_β и s_α. Тогда

$$T_{\beta_1} T_{\beta_2} = T_{\beta_1 + \beta_2}; \quad S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} = S_{\alpha_1 \alpha_2}; \quad T_\beta S_\alpha = S_\alpha T_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность тех $f \in \mathfrak{H}$, для которых $T_\beta f = f$ при любом β. Тогда для $f \in \mathfrak{N}$ будет: $T_\beta S_\alpha f = S_\alpha T_{\alpha\beta} f = S_\alpha f$, следовательно, также $S_\alpha f \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}$, а значит и ортогональное дополнение $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ приводит наше представление. Итак, в $\mathfrak{N}$ $T_\beta \equiv 1$, а S_α — произвольное представление группы $\mathfrak{S}$, т. е. мультипликативной группы положительных чисел.

Перейдем к рассмотрению представления в $\mathfrak{M}$. Там равенство $T_\beta f = f$ для всех β возможно только при $f = 0$. Согласно известной

---

* Эта группа изоморфна фактор-группе $R / \mathfrak{T}$.

теореме Стона ([2]), из (1) следует, что $T_\beta f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\beta}\, dE_\lambda f$, где E_λ — спектральная функция.

Далее, согласно теории Хеллингера-Хана (см. например, ([2])) пространство $\mathfrak{M}$ можно реализовать в виде прямой суммы пространств $\mathfrak{M}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ функций $f_k(\lambda)$ таких, что $\|f_k\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_k(\lambda)|^2 d\sigma_k(\lambda) < +\infty$, где $\sigma_k(\Delta)$ — положительная вполне аддитивная функция борелевских множеств на прямой и $\sigma_k(-\infty, +\infty) = 1$. Кроме того, каждая из функций $\sigma_k(\Delta)$ абсолютно непрерывна относительно предыдущих $\sigma_{k-1}(\Delta), \ldots, \sigma_1(\Delta)$. Из определения $\mathfrak{M}$ следует также, что ни одна из функций $\sigma_k(\Delta)$ не сосредоточена в нуле. Мы будем писать $f \sim \{f_k(\lambda)\}$; тогда $T_\beta f \sim \{e^{i\lambda\beta} f_k(\lambda)\}$.

Оператор S_α можно изобразить в виде матрицы $\|S_{kj}(\alpha)\|$, где $S_{kj}(\alpha)$ — ограниченный оператор из $\mathfrak{M}_j$ в $\mathfrak{M}_k$. Именно

$$S_\alpha f \sim \Big\{ \sum_j S_{kj}(\alpha) f_j(\lambda) \Big\},$$

и, в силу унитарности S_α,

$$\sum_k \|f_k\|^2 = \sum_k \Big\| \sum_j S_{kj}(\alpha) f_j \Big\|^2.$$

Положим $S_{kj}(\alpha)\, 1 = \pi_{kj}(\alpha, \lambda)$; из (1) легко следует, что

$$S_{kj}(\alpha) f_j(\lambda) = \pi_{kj}(\alpha, \lambda) f_j(\lambda/\alpha); \tag{2}$$

следовательно, условие унитарности перепишется в виде

$$\sum_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_k(\lambda)|^2 d\sigma_k(\lambda) = \sum_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \sum_j \pi_{kj}(\alpha, \lambda) f_j(\lambda/\alpha) \Big|^2 d\sigma_k(\lambda). \tag{3}$$

Полагая в (3) $f_k(\lambda) = 0$ при $k \neq 1$, а $f_1(\lambda)$ равной характеристической функции множества Δ, получим $\sigma_1(\Delta) = \sum\limits_k \int\limits_{\Delta\alpha} |\pi_{k1}(\alpha, \lambda)|^2\, d\sigma_k(\lambda)$, отсюда $\sigma_1(\Delta\alpha) = \sum\limits_k \int\limits_\Delta \Big| \pi_{k_1}\Big(\frac{1}{\alpha}, \lambda\Big) \Big|^2 d\sigma_k(\lambda)$.

Так как все функции $\sigma_k(\Delta)$, $k = 2, 3, \ldots$, абсолютно непрерывны относительно $\sigma_1(\Delta)$, то последнее равенство означает, что $\sigma_1(\Delta\alpha)$ абсолютно непрерывна относительно $\sigma_1(\Delta)$.

Положим $d\sigma_1(\lambda\alpha) / d\sigma_1(\lambda) = \omega(\lambda, \alpha)$. Легко видеть, что $\omega(\lambda, \alpha_1)\, \omega(\lambda\alpha_1, \alpha_2) = \omega(\lambda, \alpha_1\alpha_2)$. Отсюда, повторяя рассуждения, приведенные на стр. 573, находим, что $\sigma_1(\Delta) = \int\limits_\Delta \omega_1^2(\lambda)\, |\lambda|^{-1}\, d\lambda$. Так как все $\sigma_k(\Delta)$ подчинены $\sigma_1(\Delta)$, то также $\sigma_k(\Delta) = \int\limits_\Delta \omega_k^2(\lambda)\, |\lambda|^{-1}\, d\lambda$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_k^2(\lambda)\, |\lambda|^{-1}\, d\lambda = 1$.

Обозначим через E_k множество тех значений λ, для которых $\omega_k(\lambda) = 0$. Мы имеем $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ и E_1 есть одно из множеств (0), $(0 + \infty)$, $(-\infty, 0)$. Положим $\varphi_k(\lambda) = \omega_k(\lambda) f_k(\lambda)$ и определим норму φ_k равенством $\|\varphi_k\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_k(\lambda)|^2 |\lambda|^{-1}\, d\lambda$; тогда $\|\varphi_k\|^2 = \|f_k\|^2$, т. е. переход $f_k \to \varphi_k$ есть изометрическое отображение $\mathfrak{M}_k$ на пространство $\mathfrak{P}_k$ всех φ_k с конечной нормой $\|\varphi_k\|^2$, удовлетворяющих условию:

$\varphi_k(\lambda) = 0$ на E_k. Мы можем поэтому реализовать $\mathfrak{M}$ как прямую сумму $\mathfrak{P}_k$. При этом операторы S_{kj} переходят в операторы над $\varphi_k(\lambda)$, которые мы снова обозначим через $S_{kj}(\alpha)$. Из (2) следует, что $S_{kj}(\alpha)\varphi_j(\lambda) = \pi_{kj}'(\alpha,\lambda)\varphi_j(\lambda/\alpha)$, где обозначено: $\pi_{kj}'(\alpha,\lambda) = \omega_k(\lambda)\pi_{kj}(\alpha,\lambda)\omega_j^{-1}(\lambda/\alpha)$ при $\lambda/\alpha \overline{\in} E_j$ и не определено при $\lambda/\alpha \in E_j$. Условие (3) унитарности запишется теперь в виде

$$\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_x(\lambda)|^2 |\lambda|^{-1} d\lambda = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \sum_j \pi_{kj}'(\alpha, \alpha\lambda)\varphi_j(\lambda)\Big|^2 |\lambda|^{-1} d\lambda. \qquad (4)$$

Обозначим через $n_0 (\leqslant +\infty)$ число всех $\mathfrak{M}_k$ и через $\mathfrak{H}_0$ — унитарное пространство последовательностей чисел $\{\xi_k\}$ таких, что $\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k|^2 < +\infty$ (если $n_0 = \infty$), а через $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ его конечномерное подпространство, определяемое условием $\xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = 0$. Соотношение $f \sim \{\varphi_k(\lambda)\}$ означает, что элементы $\mathfrak{M}$ можно реализовать как вектор-функции со значениями из $\mathfrak{H}_0$ такие, что $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{H}_0$ при $\lambda \overline{\in} \sum E_k$ и $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{H}_k$ при $\lambda \in E_k$. Мы будем теперь писать $f \sim \varphi(\lambda)$.

Очевидно:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(\lambda)\|^2 |\lambda|^{-1} d\lambda;\ T_\rho f \sim e^{i\lambda\rho}\varphi(\lambda);\ S_\alpha f \sim A(\alpha,\lambda)\varphi(\lambda/\alpha), \qquad (5)$$

где $A(\alpha,\lambda)$ — оператор, определенный матрицей $\pi_{kj}'(\alpha,\lambda)$.

Равенство (4) можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(\lambda/\alpha)\|^2 |\lambda|^{-1} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \|A(\alpha,\lambda)\varphi(\lambda/\alpha)\|^2 |\lambda|^{-1} d\lambda.$$

Отсюда следует, что для почти всех (кратко п. в.) $\lambda \overline{\in} \alpha E$ $(E = \Sigma E_k)$ $A(\alpha,\lambda)$ есть изометрический оператор с областью определения $\mathfrak{H}_0$, а для п. в. $\lambda \in \alpha E_k$ $A(\alpha,\lambda)$ есть изометрический оператор с областью определения $\mathfrak{H}_k$.

Далее, из определения $\pi_{kj}'(\alpha,\lambda)$ вытекает, что область изменения $A(\alpha,\lambda)$ есть $\mathfrak{H}_0$ при $\lambda \overline{\in} E$ и есть $\mathfrak{H}_k$ при $\lambda \in E_k$. Но тогда при п. в $\lambda \overline{\in} \alpha E$ и $\lambda \in E_k$ $A(\alpha,\lambda)$ будет изометрически отображать $\mathfrak{H}_0$ на $\mathfrak{H}_k$, что возможно лишь в том случае, когда для п. в. $\lambda \overline{\in} \alpha E$ будет также $\lambda \overline{\in} E$. Это, в свою очередь, возможно лишь тогда, когда с точностью до множества меры нуль E есть одно из множеств $(0), (-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Из аналогичных рассуждений следует, что то же самое имеет место для каждого E_k.

Используем теперь (1). В силу (5) оно эквивалентно равенству $A(\alpha_1,\lambda)A(\alpha_2,\lambda/\alpha_1) = A(\alpha_1\alpha_2,\lambda)$, имеющему место для п. в. троек $(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)$. Положим $B(\alpha,\beta) = A(\alpha/\beta,\alpha)$; этот оператор изометричен и определен для п. в. пар $(\alpha/\beta,\alpha)$; следовательно, по теореме Фубини, для п. в. пар (α,β). Последнее равенство перепишется в виде

$$B(\alpha,\beta)B(\beta,\gamma) = B(\alpha,\gamma), \qquad (6)$$

причем опять таки, согласно теореме Фубини, это последнее равенство верно для п. в. троек (α,β,γ). Но тогда найдется значение β_0 такое, что при $\beta = \beta_0$ $B(\alpha,\beta_0)B(\beta_0,\gamma) = B(\alpha,\gamma)$ для п. в. пар (α,γ). Полагая $B(\alpha,\beta_0) = B(\alpha), B(\beta_0,\gamma) = C(\gamma)$, мы получим $B(\alpha,\gamma) = B(\alpha)C(\gamma)$, следовательно, $A(\alpha,\lambda) = B(\lambda)C(\lambda/\alpha)$. Подставляя это выражение в (6), получим $B(\lambda)C(\lambda/\alpha_1)B(\lambda/\alpha_1)C(\lambda/\alpha_1\alpha_2) = B(\lambda)C(\lambda/\alpha_1\alpha_2)$. Отсюда для п. в. λ $B(\lambda)C(\lambda) = 1$. Таким образом, окончательно,

$$A(\alpha,\lambda) = B(\lambda)B^{-1}(\lambda/\alpha). \qquad (7)$$

Положим теперь $\psi(\lambda) = B^{-1}(\lambda)\varphi(\lambda)$; тогда $\|\psi(\lambda)\| = \|\varphi(\lambda)\|$. Будем писать $f \sim \psi(\lambda)$; тогда $\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\psi(\lambda)\|^2 \frac{d\lambda}{|\lambda|}$, $T_\beta f \sim e^{i\lambda\beta}\psi(\lambda)$ и $S_\alpha f \sim \psi(\lambda/\alpha)$.

По определению $\mathfrak{H}_0$ имеем $\psi(\lambda) = \{\psi_1(\lambda), \dots\}$, где $\psi_k(\lambda)$ — скалярные функции и $\|\psi(\lambda)\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\psi_k(\lambda)|^2$, откуда $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi_k(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda$.

Будем писать $f \sim \{\psi_k(\lambda)\}$; тогда

$$T_\beta f \sim \{e^{i\lambda\beta}\psi_k(\lambda)\}, \ S_\alpha f \sim \{\psi_k(\lambda/\alpha)\}. \tag{8}$$

Пусть, в частности, представление неприводимо. Тогда $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$ обращается в (0). В первом случае $\mathfrak{N}$ одномерно и S_α — характер мультипликативной группы положительных чисел; во втором случае $\mathfrak{H}_0$ одномерно, так что $\psi(\lambda)$ есть скалярная комплекснозначная функция от λ. Легко видеть, что в этом случае представление неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$ состоит из функций $\psi(\lambda)$, отличных от нуля только для положительных или только для отрицательных значений λ*.

Сделав в этом случае трансформацию Фурье $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i\lambda x} d\lambda$, мы легко придем к следующей теореме:

Теорема. *Всякое неприводимое унитарное представление R эквивалентно одному из следующих представлений:*

I. *$\mathfrak{H}$ одномерно, $T_\beta \equiv 1$, S_α — характер мультипликативной группы положительных чисел.*

II. *$\mathfrak{H}$ состоит из функций $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, с суммируемым квадратом модуля, которые являются предельными значениями функций, аналитических в верхней полуплоскости; $T_\beta f(x) = f(x+\beta)$; $S_\alpha f(x) = \sqrt{\alpha} f(\alpha x)$.*

III. *$\mathfrak{H}$ состоит из функций $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, с суммируемым квадратом модуля, которые суть предельные значения функций, аналитических в нижней полуплоскости; $T_\beta f(x) = f(x+\beta)$; $S_\alpha f(x) = \sqrt{\alpha} f(\alpha x)$.*

Поступило
20 VIII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, Матем. сб. 13 (55), № 2—3, 301 (1943).
[2] M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, N. Y., 1932.

* Эти типы неприводимых представлений соответствуют, очевидно, разбиению действительной λ-оси на транзитивные многообразия $(-\infty, 0)$, (0), $(0, +\infty)$ по отношению к преобразованиям $\lambda \to \alpha\lambda$.