Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. М. ГАЛОНЕН

К ВОПРОСУ О ФОРМАЛЬНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 30 VII 1946)

Известные методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка позволяют найти общий или полный интеграл уравнения лишь при очень больших ограничениях, накладываемых на характер уравнения.

Между тем, целый ряд задач геометрии, механики, гидро- и аэродинамики требует интегрирования дифференциальных уравнений, для которых неизвестны не только общий, но и частный интегралы. Представляет интерес поэтому отыскание частных интегралов некоторых дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$F(z, p, q, r, s, t)=0,$$

где $z=z(x,y)$; p, q, r, s, t — частные производные 1-го и 2-го порядков.

Ищем те частные интегралы уравнения, для которых p и q являются функциями от z.

Задача сводится к интегрированию уравнений 1-го порядка

$$\Phi\left(z, p, \frac{dp}{dz}, a\right)=0, \qquad p\frac{dq}{dz}=q\frac{dp}{dz}$$

и уравнения в полных дифференциалах:

$$dz=pdx+qdy.$$

Интегрируя, получим частный интеграл уравнения с тремя произвольными постоянными

$$\int\frac{dz}{\varphi(a, c, z)}=x+ay+b.$$

Для уравнения $s=f(z)$, интегрируемого методом Дарбу лишь при $f(z)=Ae^{zk}$, частный интеграл будет $\int\frac{dz}{\sqrt{\int f(z)\,dz+c}}=\sqrt{\frac{2}{a}}\,x+ +\sqrt{2a}\,y+b$.

Таким образом получается, например, интеграл уравнения одевания поверхностей $s = \sin z$ вида $\int \frac{dz}{\sqrt{-\cos z + c}} = \sqrt{\frac{2}{a}}\, x + \sqrt{2a}\, y + b$, который при $c = 1$ совпадает с интегралом Граве ([1]), полученным довольно громоздким путем, с помощью формул сферической тригонометрии.

Для уравнения конформного преобразования сдвига поверхностей $r + t = 2ke^z$, для которого Граве при $k = \text{const}$ получил частный интеграл, не содержащий произвольных постоянных, найдем при $k = k(z)$ частный интеграл вида $\int \frac{dz}{\sqrt{2\int ke^z dz + b}} = \sqrt{\frac{2}{a^2 +}}\,(x + ay + c)$ с тремя произвольными постоянными.

Из уравнений, приводящихся к виду $F(z, p, q, r, s, t) = 0$ и, следовательно, допускающих частный интеграл с тремя произвольными постоянными, можно указать уравнения:

$$F(z,\ px,\ qy,\ rx^2,\ sxy,\ ty^2) = 0,$$

$$F\left(z, \frac{p}{\varphi(x)}, \frac{q}{\psi(y)}, \frac{r\varphi - p\varphi'}{\varphi^3}, \frac{s}{\varphi\psi}, \frac{t\psi - q\psi'}{\psi'^3}\right) = 0$$

и т. д.

Не лишена интереса попытка увеличения числа произвольных постоянных в частном интеграле и получения интегралов, содержащих произвольные функции.

Путей к этому три: 1) установление частных типов уравнений, допускающих частный интеграл, содержащий произвольную функцию, 2) применение метода вариации произвольных постоянных, 3) применение точечных преобразований.

1. Замечая, что уравнение линейчатых развертывающихся поверхностей $rt - s^2 = 0$ при ограничении $p = p(z)$, $q = q(z)$ обращается в тождество, найдем $p = Z$, где Z — произвольная функция от z; получим, следовательно, частный интеграл уравнения с одной произвольной функцией и двумя произвольными постоянными $z = \varphi(x + ay + b)$.

Частным интегралом вида $z = \varphi(x + ay + b)$ будет обладать всякое уравнение вида $F(rt - s^2,\ sq - pt,\ rq - sp,\ rq^2 - tp^2) = F(0, 0, 0, 0)$.

Для уравнения $F\left(\frac{q}{p}, \frac{s}{r}, \frac{t}{s}, \frac{t}{r}\right) = 0$ можно получить частный интеграл с одной произвольной функцией, определяя a уравнением $F(a, a, a, a^2) = 0$.

Для уравнения с постоянными коэффициентами $Ar + Bs + Ct = 0$, полагая $q = ap$ и решая уравнение $A + Ba + Ca^2 = 0$, легко получить известный общий интеграл $z = \varphi(x + a_1 y) + \psi(x + a_2 y)$.

2. Обобщая метод Лагранжа вариации произвольных постоянных на уравнения в частных производных второго порядка, Имшенецкий ([3]) показал, что интегрирование билинейного уравнения 2-го порядка может быть сведено к интегрированию линейного уравнения.

Применим метод вариации к уравнению $s = f(z)$.

Частный интеграл его, найденный выше, можно представить в виде: $z = \omega(u, c)$, где $u = \sqrt{\frac{2}{a}}\, x + \sqrt{2a}\, y + b$.

Полагая $c = c(a, b)$ и выбирая a и b так, чтобы

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial\omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0, \tag{1}$$

что дает $\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial c}{\partial b}$, получим, полагая $\frac{\partial b}{\partial y} = 0$, уравнение для определения c: $\frac{d}{da}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = 0$, где $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{2}{a}}$, u определяется из уравнения (1).

Зная общий интеграл этого дифференциального уравнения 1-го порядка, не содержащего явно независимого переменного b, и замечая, что $b = X$, где X — произвольная функция от x, получим интеграл уравнения $s = f(z)$, содержащий две произвольных функции.

Теоретически интересный результат на практике представляет значительные затруднения, так как рассуждения требуют обращения интеграла $\int \frac{dz}{\sqrt{\int f(z)\,dz + c}} = u$, который уже для уравнения $s = \sin z$ будет эллиптическим.

3. Зная частный интеграл уравнения $F(z, p, q, r, s, t) = 0$, можно иногда с помощью точечных и других преобразований получить полный интеграл уравнения или интеграл, содержащий произвольные функции.

Так, применение указанного выше метода отыскания частных интегралов и преобразования $\frac{\partial z}{\partial y} = u$ к уравнению $r + f(s, t) = 0$ позволяет получить его полный интеграл: $z = axy - \frac{f(a, b)}{2}x^2 + \frac{by^2}{2} + cx + dy + e$.

То же преобразование и знание частного интеграла уравнения $Ar + Bp + Cz + f(q, s, t) = 0$, $A, B, C = \mathrm{const}$ дает возможность определить по частному интегралу полный $z = \int_{y_0}^{y} \varphi(x, y, a, b, c)\,dy + \psi(x, d, e)$, где ψ является интегралом обыкновенного дифференциального уравнения $A\psi'' + B\psi' + C\psi + f\left[u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right] = 0$, $\varphi = u$ — интеграл обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Замечая, что уравнение, частный интеграл которого мы можем найти, $F(z, p, r, s/q) = 0$, допускает бесконечную группу точечных преобразований $x_1 = x$, $y_1 = Y$, $z_1 = z$, где Y — произвольная функция от y, получим частный интеграл с одной произвольной функцией и тремя произвольными постоянными.

Аналогично для уравнения $F(z, q, t, s/p) = 0$.

Для уравнения $F(q, t, s/e^z) = 0$ получим с помощью точечных преобразований $x = X$, $y_1 = y$, $z_1 = z - \ln X$ интеграл с одной произвольной функцией $z = \ln X' + \varphi(X + ay + c_1 a_1 b)$.

Для уравнения $F\left(\frac{q}{z}, \frac{t}{z}, \frac{zs - pq}{z}\right) = 0$ преобразование $x_1 = X$, $y_1 = y$, $z_1 = zX'$ дает интеграл $\int \frac{dx}{\varphi(z, X')} = \frac{X' + y}{X'}$, где X — произвольная функция от x.

Интегралы с одной произвольной функцией могут быть получены для уравнений

$$A(z, p, q, r)s + B(z, p, q, r)t = 0,$$
$$A(z, p, q, t)r + B(z, p, q, t)s = 0,$$
$$A(p, q)r + B(p, q)s + C(p, q)t = 0$$

и др.

Применение указанного приема к уравнениям, интегрируемым методами Дарбу и Монж—Ампера, дает возможность в некоторых случаях очень элементарным путем получить общий интеграл.

Так, для уравнения $ps = qr$, найдя частный интеграл его $\varphi(z) =$

$= x + ay + b$ и применяя точечное преобразование $x_1 = X$, $y = Y$, $z_1 = z$, получим общий интеграл $\varphi(z) = x + \psi(y)$.

Для уравнения Лиувилля $s = he^z$, частный интеграл которого $e^z = \frac{2}{(x+y)^2 h}$, общий интеграл находится с помощью группы точечных преобразований $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = z - \ln X' - \ln Y'$.

Так же находится общий интеграл известного уравнения $s / pq = f(z)$ и др.

Поступило
30 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Grave, Über eine Tschebyscheffsche Frage, Львов, 1927. [2] Граве, Плоская геометрия Эвклида как предельная для геометрии Лобачевского, Киев, 1927. [3] Имшенецкий, Исследование способов интегрирования уравнений с частными производными 2-го порядка функции двух независимых переменных, Казань.