Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. А. БАРБАШИН

О КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1946)

Дана система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{k=1}^{m} P_{i,k}\, du_k\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что функции $P_{i,k}$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определены во всех точках некоторой области G n-мерного евклидова пространства E_n с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках этой области. Параметры $u_1, u_2, \ldots, u_m$ мы будем рассматривать как проекции перемен ного вектора $\bar{u}$ из m-мерного векторного пространства R_m. Мы предполагаем, что в области G выполняются условия полной интегрируемости системы (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_{\alpha,\beta}}{\partial x_i} P_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_{\alpha,k}}{\partial x_i} P_{i,\beta}, \tag{2}$$

где

$$\alpha = 2, \ldots, n; \qquad \beta, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Известно, что при указанных условиях для любой точки $p_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ из области G и любого вектора $\bar{u}_0$ $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)$ из R_m существует решение системы (1)

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, u_1 - u_1^0, u_2 - u_2^0, \ldots, u_m - u_m^0),$$

удовлетворяющее условиям

$$x_i^0 = f_i\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, 0, 0, \ldots, 0),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это решение мы будем записывать коротко следующим образом:

$$p = f(p_0, \bar{u} - \bar{u}_0).$$

Известно, что функция f непрерывно зависит от вектора $\bar{u}$ для всех тех значений этого вектора, для которых значения функции f лежат в G. Если же за область определения функции f взять ограниченную часть M области G, то функция f будет также и непрерывной функцией точки p_0 в M.

В этой статье нас интересуют решения $p = f(p_0, \bar{u} - \bar{u}_0)$, определенные в области M для всех значений вектора $\bar{u}$ из R_m. Этим решениям будут соответствовать в области G l-мерные $(l \leqslant m)$ интегральные многообразия — мы назовем их, по аналогии с динамическими системами, орбитами.

Если имеется орбита Z, проходящая через точку p_0, то всякая другая точка p' этой же орбиты определяется соотношением $p' = f(p_0, \overline{u'} - u_0)$, где u' — специально подобранный вектор из R_m.

Обратно, всякому вектору $\overline{u'}$ и точке p_0 из M соответствует единственная точка $p' = f(p_0, \overline{u'} - \overline{u_0})$ орбиты Z.

Таким образом, точки орбиты Z подвергаются преобразованиям, составляющим группу, изоморфную группе векторов R_m. Эту группу преобразований мы будем в дальнейшем обозначать тоже через R_m, а элементы ее будем интерпретировать как векторы. Так как преобразования орбиты Z являются гомеоморфными, то она должна быть однозначным и непрерывным образом группы R_m.

Рассмотрим теперь совокупность всех тех преобразований из R_m, которые оставляют фиксированную точку p_0 орбиты Z неподвижной; очевидно, такие преобразования образуют подгруппу W группы R_m. Рассмотрим факторгруппу R_m/W, считая, что в ней введена естественная топология ([1]). Орбита Z будет, очевидно, взаимно однозначным непрерывным образом факторгруппы R_m/W.

Известно ([1]), что факторгруппа R_m/W должна быть прямой суммой r групп, изоморфных аддитивной группе вещественных чисел, и k групп, изоморфных мультипликативной группе комплексных чисел единичного модуля. Группу R_m/W мы будем обозначать через $W_{r,k}$, а соответствующую этой группе орбиту через $Z_{r,k}$. Мы имеем возможность теперь провести классификацию всех орбит системы (1), относя к одному классу все те орбиты $Z_{r,k}$, для которых r и k соответственно равны. Орбита класса (r, k) будет, очевидно, взаимнооднозначным непрерывным образом группы $W_{r,k}$, пространство которой является топологическим произведением r-мерной гиперплоскости на k-мерный тор.

Предположим теперь, что некоторая компактная часть M области G заполнена целиком орбитами системы (1). К орбитам, заполняющим M, применима вся теория, изложенная нами в предыдущей заметке ([2]). Пусть $\overline{n}$ — какой-либо единичный вектор из R_m. Мы скажем, что векторная группа R_m $\overline{n}$-упорядочена, если условимся считать, что $\overline{u_1} < \overline{u_2}$ тогда и только тогда, когда $\overline{n} \cdot \overline{u_1} < \overline{n} \cdot \overline{u_2}$.

Легко проверить, что устанавливаемый порядок в R_m удовлетворяет всем аксиомам, налагаемым нами на полуупорядоченную группу ([2]). Пусть R_m $\overline{n}$-упорядочена, тогда орбиты из M будут обладать теми или иными свойствами, зависящими, вообще говоря, от способа упорядочивания группы R_m — мы будем говорить в этом случае, что орбиты обладают данными свойствами в направлении $\overline{n}$. Таким образом, можно говорить об орбитах рекуррентных, устойчивых, блуждающих и т. д. в направлении $\overline{n}$. Если же орбита обладает каким-либо свойством в любом направлении, то мы будем говорить, что она обладает этим свойством вполне (вполне устойчива, вполне рекуррентна и т. д.).

Естественно ставится вопрос — каково наименьшее число направлений таких, что поведение орбиты Z вдоль этих направлений полностью определяет поведение Z вдоль любого другого направления. Оказывается, что для всякой орбиты существует m таких направлений (где m — размерность группы R_m), характеризующих поведение Z вполне. Заметим, что, говоря о поведении орбиты, мы имеем в виду те свойства орбит, которые изучались нами в заметке ([2]), т. е. свойства устойчивости, рекуррентности, периодичности и т. д.

Рассмотрим теперь однопараметрическую подгруппу R_1 группы R_m, состоящую из всех векторов заданного направления. Ранее указывалось, что всякая орбита Z является непрерывным и однозначным образом группы R_m. Образ подгруппы R_1 при отображении R_m на Z

назовем траекторией. Очевидно, через всякую точку Z проходит одна траектория, соответствующая данному направлению.

Заметим, что всякая траектория в M, имеющая данное направление $\overline{n}(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, является траекторией в обычном смысле для динамической системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} n_k P_{i,k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t = \sum_{i=1}^{m} n_i u_i .$$

Нами изучалась связь между свойствами орбиты Z и свойствами траекторий, расположенных на ней. Пусть $Z_{r,k}$ — какая-либо орбита из M. Оказывается, что в R_m существует точно k линейно независимых векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ таких, что траектории, направление которых определяется данными векторами, являются периодическими. Имеется точно $m - r - k$ векторов $\overline{v}_{k+1}, \overline{v}_{k+2}, \ldots, \overline{v}_{m-r}$ таких, что траектории, соответствующие этим векторам, вырождаются в точку.

Обозначим через R_k группу, порожденную векторами $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$. Всякая траектория, соответствующая вектору из R_k, будет рекуррентной или периодической, причем совокупность векторов из R_k, определяющих периодические траектории, будет всюду плотной в R_k. Если $k > 1$, то в R_k существует всюду плотное множество векторов, определяющих рекуррентные не периодические траектории. Каждая из подобных траекторий всюду плотна на некотором k-мерном торе Z_k, являющемся частью орбиты $Z_{r,k}$.

Если же вектор из R_m не является линейной комбинацией векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_{m-r}$, то траектория, соответствующая такому вектору, может иметь как угодно сложную структуру. Однако, если орбита $Z_{r,k}$ является топологическим образом своей группы $W_{r,k}$, то указанная траектория, очевидно, будет топологическим образом прямой.

Назовем орбиту $Z_{r,k}$ нормальной, если она является топологическим образом своей группы $W_{r,k}$. Мы видим, что для нормальной орбиты удается полностью выяснить тип траекторий для каждого направления. Становится важной, поэтому, проблема выделения нормальных орбит из прочих.

Теорема. *Следующие орбиты будут нормальными в евклидовом пространстве E_n:*

a) *все орбиты типа $Z_{0,k}$;*

b) *n-мерные орбиты;*

c) *$(n-1)$-мерные орбиты типа $Z_{1,n-2}$.*

Истинность a) следует из того факта, что непрерывный взаимно однозначный образ компакта есть компакт.

Утверждение b) следует из теоремы Броуэра об инвариантности областей; в силу этой теоремы отображение $W_{r,k}$ на $Z_{r,k}$ становится открытым. Открытое же взаимно однозначное отображение есть гомеоморфизм.

В более сложном доказательстве утверждения c) существенно используется n-мерная теорема Жордана о разбиении E_n замкнутым многообразием.

Заметим, что $(n-1)$-мерные орбиты в n-мерном пространстве допускают более точное изучение, чем в пространстве высшего числа измерений.

Поступило
27 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы, 1938, стр. 71, 185. Е. А. Барбашин, ДАН, 51, № 1 (1946).