Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 6

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О p-СВОЙСТВАХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 21 IX 1946)

§ 1. Некоторые свойства групп не имеют прямого отношения к простым числам или же относятся в равной мере ко всем ним. Таковы свойства абелевости, разрешимости, специальности и т. д. Другие, наоборот, связаны с определенным простым числом p и необязательны для других простых чисел. Свойства этого второго рода мы будем называть p-свойствами.

В предыдущих работах [1,2] нами уже были исследованы некоторые p-свойства конечных групп — например, свойства так называемых p-разложимых групп, а также условия существования и число неизоморфных неспециальных и p-неразложимых подгрупп. Мы пришли тогда к определению p-разложимых групп путем отказа от симметрии по отношению ко всем простым числам в определении специальных групп.

В настоящей работе такой отказ проведен и для ряда других определений и теорем: для определений разрешимости и сильной разрешимости*, коммутанта, для теоремы Вендта и в других случаях.

Исследованию подвергались лишь конечные группы, аналогичные результаты для бесконечных групп будут изложены в другой работе.

§ 2. Определение 1. Если всякий элемент группы $\mathfrak{G}$, имеющий своим порядком равную или неравную единице степень данного простого числа p, перестановочен со всяким элементом $\mathfrak{G}$, порядок которого не делится на p, то $\mathfrak{G}$ назовем p-абелевой.

Согласно этому определению все не pd-группы** являются p-абелевыми.

Определение 2. Группа $\mathfrak{G}$ называется p-разложимой, если она разлагается в прямое произведение двух множителей, из которых один является ее p-силовской подгруппой.

Согласно этому определению к p-разложимым группам следует отнести и все не pd-группы.

Теорема 1. *p-абелевы и p-разложимые группы совпадают.*

Определение 3. Коммутатор всякой пары элементов $\mathfrak{G}$, из которых один элемент имеет порядком некоторую степень $\geqslant 1$ простого числа p, а другой — число, не делящееся на p, назовем p-коммутатором.

Подгруппу, порожденную всеми p-коммутаторами $\mathfrak{G}$, назовем p-коммутантом $\mathfrak{G}$.

* Группы у которых, все индексы главного ряда простые числа, мы будем называть сильно разрешимыми.

** pd-группой мы назвали [1] группу, порядок которой делится на p.

Теорема 2. *p-коммутант является характеристической подгруппой.*

Теорема 3. *Для того чтобы факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ была p-абелевой, необходимо и достаточно, чтобы p-коммутант $\mathfrak{G}$ содержался в $\mathfrak{H}$.*

Определение 4. Если каждый индекс композиционного ряда группы $\mathfrak{G}$ или не делится на данное простое число p, или равен p, то $\mathfrak{G}$ назовем p-разрешимой группой.

Согласно этому определению к p-разрешимым группам нужно отнести и все не pd-группы.

Теорема 4. *p-абелева группа является p-разрешимой.*

Теорема 5. *Всякая подгруппа p-разрешимой группы также p-разрешима.*

Теорема 6. *Если $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$ и если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ p-разрешимы, то p-разрешима и $\mathfrak{G}$.*

Теорема 7. *Для того чтобы группа была p-разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы ее ряд p-коммутантов заканчивался единичной подгруппой.*

Следствие. Всякая p-разрешимая группа содержит отличный от единичной подгруппы p-абелев нормальный делитель.

Теорема 8. *Для того чтобы группа была p-разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы каждый индекс главного ряда группы или не делился на p, или был равен степени p.*

§ 3. Примером группы p-разрешимой, но неразрешимой в обычном смысле, может служить группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{P}$ — абелева p-силовская подгруппа $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ — простая нециклическая подгруппа. Ряд p-коммутантов: $\mathfrak{G}$, 1; ряд коммутантов: $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$.

§ 4. Теорема 9. *Если группа $\mathfrak{G}$ порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_k > 0$, является p_1-разрешимой, то она имеет подгруппы всех порядков вида $p_1^{\alpha_1} p_i^{\alpha_i}$, $i = 2, 3, \ldots, k$, причем все такие подгруппы, имеющие один и тот же порядок, сопряжены между собой в $\mathfrak{G}$.*

§ 5. Теорема 9 является некоторым аналогом теоремы Ф. Голла ([3]) об обычных разрешимых группах. В какой степени эта аналогия является полной, т. е. вытекает ли теорема Ф. Голла из теоремы 9 настоящей работы, — в случае, если предположить разрешимость группы относительно всех простых чисел, — установить мне не удалось. Некоторые другие, напрашивающиеся сами собой, аналоги теоремы Голла оказываются или не имеющими места или проблематичными. Так, например, нельзя предположить, что всякая p-разрешимая группа порядка g имеет подгруппу любого порядка m, если только $g = mn$, $(m, n) = 1$, $m \equiv 0 \pmod{p}$. Опровергающим примером служит группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}$ § 3. Не удается также доказать, что всякая p-разрешимая группа имеет подгруппу индекса p^β.

Неясно также, возможно ли обращение теоремы 9 или других ее аналогий.

§ 6. Переходим теперь к вопросу о существовании у p-разложимых групп центрального ряда в более общем смысле по сравнению с рядом, рассмотренным в теореме VIII работы ([2]).

Существование такого ряда устанавливается в приводимой ниже теореме 11. Вводной к ней будет служить следующая

Теорема 10. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была p-абелевой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1° *Каждый элемент порядка вида p^λ, $\lambda \geqslant 0$, из $\mathfrak{G}$ должен быть перестановочным с каждой силовской подгруппой $\mathfrak{G}$, порядок которой не делится на p.*

2°. *Каждый элемент порядка, не делящегося на p, из группы $\mathfrak{G}$ должен быть перестановочным с каждой p-силовской подгруппой $\mathfrak{G}$.*

Теорема 11. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была p-разложимой, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ряд нормальных делителей $\mathfrak{G}$:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_l = 1,$$

для каждой факторгруппы которого $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ выполнялись бы следующие два условия:

1°. *Каждый элемент порядка вида p^λ, $\lambda \geqslant 0$, из $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ должен быть перестановочным с каждой силовской подгруппой $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$, порядок которой не делится на p.*

2°. *Каждый элемент порядка, не делящегося на p, из группы $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ должен быть перестановочным с каждой p-силовской подгруппой $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$.*

§ 7. При обобщении понятия специальной группы можно исходить не из свойства разложимости, а из свойства инвариантности силовских подгрупп. Если здесь отказаться от симметрии по отношению ко всем простым числам, то получим другое обобщение специальных групп, что и дает следующее

Определение 5. Если p-силовская подгруппа $\mathfrak{G}$ инвариантна в ней, то $\mathfrak{G}$ назовем p-специальной.

Все не pd-группы относятся, очевидно, к p-специальным группам. Как видно из примера группы типа S, класс p-специальных групп шире класса p-разложимых.

Существование обобщенного центрального ряда у p-специальных групп устанавливает нижеследующая

Теорема 12. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была p-специальной, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ряд нормальных делителей $\mathfrak{G}$*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_l = 1,$$

для каждой факторгруппы которого $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ выполнялось бы следующее условие: каждый элемент порядка, не делящегося на p, из группы $\mathfrak{N}^{i-1}/\mathfrak{N}_i$ должен быть перестановочным с каждой p-силовской подгруппой из $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$.

§ 8. У специальных групп имеется характерное базисное свойство, составляющее содержание теорем Берсайда ([4]) и Виландта ([5]). Для p-специальных групп получается

Теорема 13. *Если $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, имеющей p-специальную факторгруппу $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, и такой, что всякая совокупность элементов из $\mathfrak{G}$, порождающая совместно с $\mathfrak{H}$ всю группу $\mathfrak{G}$, уже сама порождает $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ является p-специальной группой.*

Если здесь положить $\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{K}}_p$ ($\overline{\mathfrak{K}}_p$ — p-коммутант $\mathfrak{G}$), то получим аналог теоремы Виландта для p-специальных групп.

Теорему же Бернсайда о базисе перенести на p-специальные группы не удается, что видно из примера нециклической группы 6-го порядка, у которой 3-коммутантом является циклическая подгруппа порядка 3.

§ 9. Определение 6. Если каждый индекс главного ряда группы $\mathfrak{G}$ или не делится на данное простое число p, или равен p, то $\mathfrak{G}$ назовем сильно p-разрешимой.

Теорема 14. *Если $\mathfrak{G}$ — сильно p-разрешимая группа и $\mathfrak{K}$ порядка $p^\rho n$, $(p, n) = 1$, ее коммутант, то $\mathfrak{K}$ имеет характеристическую подгруппу порядка n.*

Если все индексы главного ряда — простые числа, то теорему 14 можно применить к любому простому делителю порядка $\mathfrak{R}$. Легко убедиться, что при этом, как частный случай теоремы 14, получается известная теорема Вендта ([6]): если все индексы главного ряда группы простые числа, то ее коммутант является специальной группой.

Поступило
21 IX 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. A. Tchounikhin, Матем. сб., **4** (46), No. 3, 521 (1938). [2] И. К. Чунихина и С. А. Чунихин, ДАН, 39, № 2 (1943); Математ. сб., **15** (57), № 2, 325 (1944). [3] Ph. Hall, J. London Math. Soc., **3**, 98 (1928). [4] W. Burnside, Proc. London. Math. Soc. (2), **13**, 6 (1913). [5] H. Wielandt, Math. Z., **41**, 281 (1936). [6] E. Wendt, Math. Ann., **55**, 479 (1902).