Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Г. МАЙЕР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БИРКГОФА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VIII 1946)

1. В 1928 г. Биркгоф ((1), стр. 269) поставил пробему: построить динамическую задачу с трехмерным замкнутым многообразием состояний таким образом, чтобы порядковое число r центральных движений было >3.

Из приводимой ниже теоремы легко вытекает существование динамических систем, определенных в замкнутом трехмерном многообразии с любым наперед заданным конечным порядковым числом центральных движений.

2. Теорема. *Пусть в n-мерном метрическом пространстве M_n, удовлетворяющем второй аксиоме счетности, определена динамическая система D; пусть N траекторий системы D: $L_1, L_2, \ldots, L_N$ таковы, что:*

1) *при $k>N$ L_k имеет среди своих ω-или α-предельных точек траекторию L_{k+1};*

2) *L_k не является устойчивой по Пуассону, кроме, может быть, L_N, если L_N замкнута (но L_N не сводится к состоянию равновесия).*

Тогда в M_n можно построить динамическую систему D' с порядковым числом центральных движений не меньше N.

Доказательство. Пусть P — какая-либо точка на L_N и $T>0$ — какое-либо число, не больше четверти периода L_N, если L_N замкнута. Как известно ((2), теорема 2), можно указать такое $\delta>0$, что для совокупности дуг $|t|\leqslant T$ траекторий, пересекающих при $t=0$ точки δ-окрестности P, существует „локальное сечение" Δ^0 (т. е. такое замкнутое в $\delta(P)$ и его продолжении по t при $|t|\leqslant T$ множество точек Δ^0, что каждая указанная дуга пересекает Δ^0 и притом только раз при $|t|\leqslant T$), причем можно считать, что $\Delta^0<\delta(P)$ и что L_N пересекает Δ^0 лишь в одной точке P.

Будем обозначать через F^0 подмножество точек Δ^0, принадлежащих дугам $|t|\leqslant T$ траекторий, проходящих при $t=0$ через точки множества F.

Пусть, для определенности, каждое L_k имеет L_{k+1} среди своих ω-предельных точек. Обозначим через $P_{k,m}$ точки пересечения L_k с Δ^0, нумеруя их в порядке возрастания параметра. Тогда, в силу предположений, множество точек $P_{k,m}$ при постоянном k и любом m состоит из изолированных точек.

Построим вокруг каждой точки $P_{k,0}$, $1\leqslant k\leqslant N-1$, окрестность $K_{k,0}$ такую, чтобы $K^0_{k,0}$ не содержала ни точек $P_{s,m}$, где $s\geqslant k, m>0$, ни точек $P_{s,0}$, $s<k$.

Возьмем произвольное $\eta>0$. Построим вокруг каждой точки $P_{k,m}$, $1\leqslant k\leqslant N-1$, $m>0$, окрестность $K_{k,m}$ столь малую, чтобы: а) $k^0_{k,m}$ не содержала точек $P_{k,r}$, $r\neq m$ (и, следовательно, и точек $P_{s,r}$,

$s > k$) и точек $P_{s,\,0}$, $s < k$; б) все траектории, пересекающие $K_{k,\,m}$, пересекали при убывании параметра окрестность $P_{k,\,0}$ диаметра $\leqslant \frac{1}{m}\,\eta$.

Обозначим через $\overline{\Delta}$ множество точек, полученных удалением из $\overline{\Delta^0}$ точек, принадлежащих хоть одному $K^0_{k,\,m}$ $(m \neq 0)$. Построим функцию $\varphi(Q)$, равную нулю в точках $\overline{\Delta}$, положительную в остальных точках M_n и удовлетворяющую всюду в M_n условию Липшица*.

Заменим в D параметр t на параметр t', так что $dt = \varphi(Q)\,dt'$, что сводится к умножению правых частей D на $\varphi(Q)$. Полученная таким образом система D', в которой точки $\overline{\Delta}$ являются состояниями равновесия, и будет искомой.

Чтобы доказать это, заметим, во-первых, что каждая траектория L_k, $1 \leqslant k \leqslant N-1$, распадается в D' на счетное множество траекторий, одна и только одна из которых имеет среди своих ω-предельных точек точки $L_{k+1}, \ldots, L_N$. Обозначим ее через L_k' и докажем, что никакая траектория D', отличная от $L_1', \ldots, L_{k-1}'$, не имеет L_k среди своих ω- или α-предельных точек.

В самом деле, каждая такая траектория L' была бы частью траектории L системы D и, следовательно, точка $P_{k,\,0}$ тоже была бы предельной для L'. В силу построения D' существует $s < k$ такое, что L' пересекает бесчисленное множество $K^0_{s,\,\cdot}$, и, следовательно, по условию б), L' имеет и точку $P_{s,\,0}$, $s < k$, своей предельной. Продолжая рассуждение, придем к противоречию, ибо точка $P_{1,\,0}$ не может быть предельной ни для какой траектории — $K^0_{1,\,0}$ состоит из состояний равновесия. Точно так же доказывается, что L_k не может входить в замыкание множества траекторий, являющихся предельными хотя бы для одной траектории D'.

Поэтому при выбрасывании всех траекторий, не являющихся предельными для других и не входящих в замыкание множества предельных траекторий, мы выкинем L_1', оставив $L_2', \ldots, L_N'$. При повторении этого процесса мы только на шаге номера N выкинем L_N', а потому порядковое число центральных движений будет $\geqslant N$.

3. Примером системы D в трехмерном многообразии, удовлетворяющей условиям теоремы, является система траекторий, получающаяся при рассмотрении геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны. Именно, вводя символический метод ([1], гл. VIII, § 11) и пользуясь приемом, указанным Морзом и Хедлундом ([3]), всегда можно для заданной траектории L указать траекторию L^*, имеющую L среди своих ω-предельных и неустойчивую по Пуассону. Выделив конечную цепочку таких траекторий любой длины N, применяем к ним построение теоремы.

4. Другие примеры можно получить следующим построением. Построим в заданном многообразии M (скажем — трехмерном евклидовом пространстве) конечную систему кривых $L_1, L_2, \ldots, L_N$, удовлетворяющую условиям 1) и 2) теоремы, так, чтобы функции dx_i/dt, определенные на множестве точек $L_1 + \ldots + L_N$, удовлетворяли на нем условиям Липшица. Доопределение динамической системы на всем M совершается с помощью леммы.

Лемма. *Пусть на множестве F метрического пространства M задана функция $f_F(P)$, удовлетворяющая условию Липшица вида*

$$|f_F(P_1) - f_F(P_2)| \leqslant K\rho\,(P_1, P_2). \tag{1}$$

* Возможность построения такой функции очевидна; ср. также ниже лемму § 4.

Можно построить функцию $f(P)$, определенную всюду на M, совпадающую с $f_F(P)$ на F и удовлетворяющую условию (1).

Лемма почти очевидна. Именно, за $f(P)$, где P — любая точка M, можно взять

$$f(P) = \inf_{Q \subset F} \left\{ f_F(Q) + K\rho(P, Q) \right\}. \tag{2}$$

Существование этой функции $f(P)$ вытекает из очевидного неравенства

$$f_F(Q) + K\rho(P, Q) \geqslant f_F(Q_1) - K\rho(P, Q_1),$$

где Q и Q_1 — любые точки F. Проверка того, что функция $f(P)$, определенная (2), удовлетворяет требованиям леммы, не представляет затруднений.

Поступило
18 VIII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Биркгоф, Динамические системы, 1941. [2] М. Бебутов, Бюлл. Моск. гос. ун-та, математика, 2, в. 3 (1939). [3] M. Morse and G. Hedlund, Am. J. Mathem., 60, 815 (1938).