Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Ю. ПАНОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 1 VII 1946)

1. Одним из наиболее простых и удобных методов решения краевых задач уравнений в частных производных является, как известно, разностный метод. При использовании этого метода дифференциальное уравнение заменяется системой разностных уравнений, содержащих значения искомой функции в узлах некоторой сетки. Эта система будет, естественно, линейной для линейного дифференциального уравнения и нелинейной для нелинейного. Последнее обстоятельство затрудняет применение разностного метода для приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений, особенно если учесть, что число уравнений в разностной системе бывает достаточно велико. Более подробное рассмотрение вопроса позволяет, однако, указать в некоторых случаях приемы, облегчающие и убыстряющие решение этой разностной системы; вопрос о степени приближения решения дифференциального уравнения точным решением соответствующей разностной системы мы оставляем без рассмотрения.

2. Пусть разностная система имеет вид:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Неизвестными в этих уравнениях являются значения искомой функции в узлах сетки: число уравнений равно числу узлов.

Естественным методом решения системы (1) является метод итерации в той или иной его форме. Однако непосредственное его применение часто наталкивается на затруднения, связанные или с очень медленной сходимостью, или даже с отсутствием сходимости.

Предположим, что система уравнений (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) В некоторой области D

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$$

существует функция $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающая непрерывными частными производными третьего порядка, такая, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

в области D.

б) Уравнения

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

имеют в области D единственное решение

$$x_i = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

в) Квадратичная форма

$$2Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} u_i u_k$$

является положительно-определенной для всех значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, принадлежащих к области D.

В этих предположениях можно показать сходимость следующего метода решения системы (1) при исходном приближении, достаточно близком к решению.

Для решения системы (1) применяется метод Ньютона (см., например, ([1]), стр. 176); составляются уравнения

$$F_i(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} F_{ik}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})(x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)}) = 0, \qquad (2)$$

в которых

$$F_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Из системы (2) определяется $(m+1)$-е приближение $x_k^{(m+1)}$ к точному решению по найденному ранее m-му приближению $x_k^{(m)}$. Первое приближение $x_k^{(1)}$ выбирается настолько близким к истинному решению системы (1), чтобы была обеспечена сходимость метода Ньютона, что всегда возможно (([1]), стр. 177). Каждая из систем уравнений (2) решается методом Зейделя ([2]), сходимость которого обеспечена ([3]), если для системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

имеем

а′) $a_{ik} = a_{ki}$;

б′) форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k$ положительно-определенная.

Так как для системы (2)

$$a_{ik} = F_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k},$$

то при выполнении условий а) и в) условия а′) и б′) также оказываются выполненными. Это означает, что метод Зейделя сходится для каждой из систем (2).

3. Если для достижения нужной точности придется сделать m_1 шагов по Ньютону и, в среднем, m_2 шагов для решения каждой из ньютоновских систем по Зейделю, то всего для получения решения потребуется $m_1 m_2$ шагов. Число приближений можно сократить, применяя следующий метод: последовательные приближения к решению системы (1) определяют из уравнений:

$$F_{ii}(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)}, x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})(x_i^{m+1} - x_i^{(m)}) +$$
$$+ F_i(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)}, x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) = 0 \qquad (3)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

представляющих собой как бы соединение систем, получаемых по методу Ньютона и методу Зейделя. Можно показать, что сходимость этого метода будет иметь место при наличии условий а), б) и в), а также достаточно хороших первых приближений.

4. В качестве примера применения этого метода можно рассмотреть решение уравнения

$$\Delta u = e^u$$

для внутренности квадрата $x = \pm 3$, $y = \pm 3$ при условии $u = 10$ на сторонах квадрата.

Значения искомой функции определялись в точках с целочисленными координатами внутри квадрата (25 точек). В силу симметрии число уравнений равно 6. Первые приближения во всех точках приняты равными нулю. Окончательные значения u для одного октанта приведены в таблице.

10,00	10,00	10,00
1,92	1,99	2,61
0,49	0,73	—
0,19	—	—

Для их получения потребовалось 7 приближений, что следует считать быстрой сходимостью.

Поступило
1 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin, 1928. [2] Seidel, Münch. Akad. Abhandlungen, 3 Abh., 81 (1874). [3] R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer, ZAMM, 9, 64 (1929).