Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 1

МАТЕМАТИКА

С. ЛОЗИНСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ С. Н. БЕРНШТЕЙНА О ПРОИЗВОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 VI 1946)

1. Примем следующие обозначения: E_n — n-мерное вещественное евклидово пространство; $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — точки этого пространства; $\vec{l}=\{l_1,\ldots,l_n\}$ — единичный вектор в этом пространстве; $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ — измеримая функция точки в E_n, принимающая комплексные значения; $D_l f(x)=D_l f(x_1,\ldots,x_n)$ — производная от функции f в точке x по направлению $\vec{l}$; $D_{x_k} f(x)=\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1,\ldots,x_n)$ $(k=1,2,\ldots,n)$; Q_L^x — замкнутая сфера в E_n с центром x и радиусом L; $|Q_L^x|$ — объем этой сферы; Q_L — сфера $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant L^2$; $\varphi(u)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая, выпуклая функция от u, $0\leqslant u<\infty$.

$$\mathfrak{D}_U[f]=\sup_{x\in E_n}|f(x)|. \tag{1}$$

$$\mathfrak{D}_{S_L^\varphi}[f]=\sup_{y\in E_n}\frac{1}{|Q_L^y|}\int\limits_{Q_L^y}\cdots\int\varphi[|f(x_1,\ldots,x_n)|]\,dx_1\ldots dx_n. \tag{2}$$

$$\mathfrak{D}_{W^\varphi}[f]=\lim_{L\to\infty}\mathfrak{D}_{S_L^\varphi}[f]. \tag{3}$$

$$\mathfrak{D}_{B^\varphi}[f]=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{|Q_T|}\int\limits_{Q_T}\cdots\int\varphi[|f(x_1,\ldots,x_n)|]\,dx_1\ldots dx_n. \tag{4}$$

Пусть $\mathfrak{D}_G[f]$ обозначает любое из чисел $\mathfrak{D}_U[f]$, $\mathfrak{D}_{S_L^\varphi}[f]$, $\mathfrak{D}_{W^\varphi}[f]$, $\mathfrak{D}_{B^\varphi}[f]$ (ср. [1]).

2. Теорема 1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — целая функция своих n аргументов, удовлетворяющая при некотором $C>0$ и некотором $R>0$ неравенству*

$$|f(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)|\leqslant C\,e^{R\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}} \tag{5}$$

$(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n$ — любые вещественные числа).

Тогда при любом вещественном α и любом $\vec{l}$

$$\mathfrak{D}_G\left[\frac{D_l f(x)\cos\alpha + Rf(x)\sin\alpha}{R}\right] \leqslant \mathfrak{D}_G[f]. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е. При $n=1$, $G=U$ и $\alpha=0$ это есть известная теорема С. Н. Бернштейна о целых функциях, обобщающая его же теорему о тригонометрических полиномах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $\vec{l} = \{1, 0, \ldots, 0\}$.

Фиксируем $x_1, \ldots, x_n$. Функция $h(z) \equiv f(x_1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\pi}{2R} + z, x_1, \ldots, x_n)$ есть целая функция от z, удовлетворяющая неравенству

$$|h(z)| \leqslant C e^{R|\operatorname{Im} z|}.$$

Следовательно ((2), III, задача 165), имеет место тождество

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{h(z)}{\sin Rz}\right] = -\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n Rh\left(\frac{n\pi}{R}\right)}{(Rz-n\pi)^2}.$$

Следовательно (ср. (2), IV, решение задачи 201),

$$\sin Rz\, h'(z) - R\cos Rz\, h(z) = -R\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 Rz}{(Rz-n\pi)^2} h\left(\frac{n\pi}{R}\right).$$

Полагая здесь $z = \frac{\alpha}{R} + \frac{\pi}{2R}$, получим

$$\cos\alpha\, D_{x_1} f(x_1, \ldots, x_n) + R\sin\alpha\, f(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= R\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\alpha)\, f\left(x_1 + \frac{n\pi}{R} - \frac{\alpha}{R} - \frac{\pi}{2R}, x_2, \ldots, x_n\right),$$

где

$$c_n(\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}\cos^2\alpha}{\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - n\pi\right)^2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(\alpha)| = 1, \tag{7}$$

откуда без труда следует

$$\mathfrak{D}_G\left[\frac{\cos\alpha\, D_{x_1} f(x) + R\sin\alpha\, f(x)}{R}\right] \leqslant \mathfrak{D}_G[f],$$

и теорема в рассматриваемом частном случае доказана.

Пусть теперь $\vec{l}$ — любой единичный вектор. Введем новые переменные

$$\xi_k = \alpha_{k1} x_1 + \ldots + \alpha_{kn} x_n \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где $\|\alpha_{k\nu}\|$ есть ортогональная матрица такая, что

$$\alpha_{11} = l_1, \ldots, \alpha_{1n} = l_n. \tag{9}$$

Положим

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

Функция $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ есть, как легко видеть, целая функция от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющая неравенству

$$|g(\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_n + i\eta_n)| \leqslant C e^{R\sqrt{\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2}} \tag{11}$$

($\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ — любые вещества числа.)

Следовательно, в силу уже доказанного,

$$\mathfrak{D}_G\left[\frac{\cos\alpha\, D_{\xi_1} g(\xi)+R\sin\alpha\, g(\xi)}{R}\right]\leqslant \mathfrak{D}_G[g]. \qquad (12)$$

Но, как легко видеть,

$$D_l f(x_1,\ldots,x_n)=D_{\xi_1} g(\xi_1,\ldots,\xi_n) \qquad (13)$$

и, следовательно.

$$\cos\alpha\, D_{\xi_1} g(\xi)+R\sin\alpha\, g(\xi)=\cos\mu\, D_l f(x)+R\sin\alpha\, f(x). \qquad (14)$$

Утверждение теоремы для случая $G=U$ очевидно из (10), (12) и (14). Для того чтобы доказать теорему в случае $G=S_L^{\varphi}$, заметим, что преобразование (8) переводит сферы пространства $x_1,\ldots,x_n$ в сферы того же радиуса пространства $\xi_1,\ldots,\xi_n$ и, будучи ортогональным, оставляет инвариантным элемент объема. В силу этого легко проверить, что

$$\mathfrak{D}_{S_L^{\varphi}}\left[\frac{\cos\alpha\, D_l f(x)+R\sin\alpha\, f(x)}{R}\right]=\mathfrak{D}_{S_L^{\varphi}}\left[\frac{\cos\alpha\, D_{\xi_1} g(\xi)+R\sin\alpha\, g(\xi)}{R}\right], \qquad (15)$$

$$\mathfrak{D}_{S_L^{\varphi}}[f]=\mathfrak{D}_{S_L^{\varphi}}[g]. \qquad (16)$$

Из (12), (15) и 16) следует (6) в случае $G=S_L^{\varphi}$. Случай $G=W^{\varphi}$ получается, если положить $L\to\infty$, а доказательство случая $G=B^{\varphi}$ аналогично доказательству случая $G=S_L^{\varphi}$.

3. Пусть $F(E)$ есть вполне аддитивная функция борелевского множества в E_n, могущая принимать комплексные значения. Фиксируя $R>0$, положим

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_{Q_R}\cdots\int e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,d_tF(E). \qquad (17)$$

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1, а потому для нее верно (6). Но для функций вида (17) можно доказать и некоторые другие неравенства, обобщающие известную теорему Szegö. Положим, при любом $\vec{l}$,

$$\sigma_l(x)=\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\frac{1}{R}\int\limits_{Q_R}\cdots\int(R-|t_1l_1+\ldots+t_nl_n|)\,e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,d_tF(E),$$

$$\bar{f}_l(x)=\bar{f}_l(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=i\int\limits_{Q_R}\cdots\int e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,\operatorname{sgn}(t_1l_1+\ldots+t_nl_n)\,d_tF(E). \qquad (18)$$

Теорема 2. *Для функций вида* (17) *имеют место неравенства:*

$$\mathfrak{D}_G\left[\frac{\cos\alpha}{R}D_l\bar{f}_l(x)+\frac{\sin\alpha}{R}D_lf(x)\right]\leqslant\mathfrak{D}_G[f], \qquad (19)$$

$$\mathfrak{D}_G\left[\sigma_l(z)+\frac{\cos\alpha}{R}D_l\bar{f}_l(x)+\frac{\sin\alpha}{R}D_lf(x)\right]\leqslant\mathfrak{D}_G[f]. \qquad (20)$$

Замечание. При $n=1$, $G=U$ эти неравенства дают известные теоремы Szegö (ср. ([3], [4])).

Доказательство. Пользуясь методом Boas'a ([3], ср. также ([5])), мы можем доказать неравенства (19) и (20) в случае $\vec{l} = \{1, 0, \ldots, 0\}$. Общий случай получается отсюда ортогональным преобразованием, как в § 2.

4. С помощью (19) можно получить следующее обобщение одной теоремы Boas'a ([6]).

Теорема 3. *Пусть $F(E)$ есть виолне аддитивная функция борелевского множества в E_n, могущая принимать комплексные значения и равная нулю для любого множества, лежащего в открытой сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Пусть $f(x)$ и $\bar{f}_l(x)$ определены формулами* (17) и (18). *Тогда*

$$\mathfrak{D}_G\left[\frac{\pi \bar{f}_l(x)}{4A(R)}\right] \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_G[2f] + \mathfrak{D}_G[f]) & \text{при } 1 < R < 2, \\ \mathfrak{D}_G[f] & \text{при } 2 \leqslant R < \infty, \end{cases}$$

где

$$A(R) = \int_{1/R}^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt.$$

Поступило
30 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. S. Besicovich, Almost Periodic Functions, 1932. [2] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 1937. [3] R. P. Boas, J. London Mathemat. Soc., **12**, 164 (1937). [4] R. Bellman, Duke Mathemat. J, **10**, 649 (1943). [5] P. Civin, Duke Mathemat. J., **8**, 656 (1941). [6] R. P. Boas, Trans. Am. Mathemat. Soc., **40**, 287 (1936).