Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 2

ФИЗИКА

АСЕН ДАЦЕВ

К ВОПРОСУ ОБ ОХЛАЖДЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 22 XI 1946)

Возьмем два бесконечно длинных однородных стержня A_1 и A_2, незначительной толщины, соприкасающиеся между собой в точке 0 и составляющие продолжение друг друга. Пусть A_2 лежит на оси OX, а A_1 — на оси $-OX$. Пусть внутренние теплопроводности их будут соответственно, k_1 и k_2, $a_1{}^2 = k_1/\rho_1\sigma_1$, $a_2{}^2 = k_2/\rho_2\sigma_2$, где ρ_1, ρ_2 — соответствующие плотности, а σ_1, σ_2 — удельные теплоемкости. Если обозначим температуру стержня через $u(x, t)$, то температуры $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ соответствующих стержней A_1 и A_2 будут удовлетворять уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1{}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2{}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \tag{1''}$$

и в точке соприкосновения $x = 0$ будут иметь место два условия

$$u_1 = u_2, \tag{2}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{2'}$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ распределение температуры в A_1 и A_2 задано функциями $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, т. е. $u_1(x, 0) = \Phi_1(x)$ $(x \leqslant 0)$ и $u_2(x, 0) = \Phi_2(x)$ $(x \geqslant 0)$. Нужно найти функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ $(t > 0)$, удовлетворяющие условиям (1′), (1″), (2), (2′).

Обозначим через $\varphi(t)$ температуру в точке $x = 0$ в какой-нибудь момент $t > 0$, т. е. $\varphi(t) = u_1(0, t) = u_2(0, t)$.

Если принять что $\varphi(t)$ — известная нам функция, то интеграл u_1 для (1′) при начальном условии $u_1(x, 0) = \Phi_1(x)$ и при граничном условии $u_1(0, t) = \varphi(t)$ $(t > 0)$ будет, как известно ((1), стр. 223),

$$u_1(x,t) = V_1(x,t) + W_1(x, t), \tag{3}$$

$$V_1(x,t) = \frac{-1}{2 a_1 \sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \Phi_1(-\alpha) \left\{ e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a_1^2 t}} - e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4a_1^2 t}} \right\} d\alpha, \tag{3'}$$

$$W_1(x,t) = \frac{-1}{2 a_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\theta) \frac{e^{-\frac{x^2}{4 a_1^2 (t - \theta)}}}{(t - \theta)^{3/2}} d\theta. \tag{3''}$$

Соответственно при $x \geqslant 0$ будем иметь

$$u_2(x, t) = V_2(x, t) + W_2(x, t), \tag{4}$$

где V_2 и W_2 получаются из V_1 (3′) и W_1 (3″) при перемене знака и замене a_1 на a_2 и $\Phi_1(-\alpha)$ на $\Phi_2(\alpha)$.

При $x = 0$ должны быть выполнены условия (2) и (2′). При введении $\varphi(t)$ (2) автоматически выполняется. Для удовлетворения условия (2′) надо вычислить $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$. Получается

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = P_1(x, t) + Q_1(x, t), \tag{5}$$

$$P_1(x, t) =$$

$$= \frac{-1}{4 a_1^3 t \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \Phi_1(-\alpha) \left\{ (\alpha - x) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4 a_1^2 t}} + (\alpha + x) e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4 a_1^2 t}} \right\} d\alpha, \tag{5′}$$

$$Q_1(x, t) = \frac{-1}{2 a_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\theta) e^{-\frac{x^2}{4 a_1^2 (t - \theta)}} \left\{ \frac{1}{(t - \theta)^{3/2}} - \frac{x^2}{2 a_1^2 (t - \theta)^{5/2}} \right\} d\theta. \tag{5″}$$

Соответственно будем иметь

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = P_2(x, t) + Q_2(x, t), \tag{6}$$

P_2 и Q_2 получаются аналогично P_1 и Q_1.

Теперь, если подставить в (2′) соответствующие значения $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ из (5) и (6), полагая $x = 0$, то условие (2′) даст одно интегральное уравнение для неизвестной функции $\varphi(t)$. Q_1 из (5″) имеет смысл для всякого $x \neq 0$, но переход $x \to 0$ не может быть осуществлен непосредственно. Для этого постараемся получить другим способом интегральное уравнение, определяющее $\varphi(t)$. Интегрируем уравнение (2′) по t от нуля до t $(x = 0)$:

$$k_1 \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial x} dt = k_2 \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial x} dt. \tag{7}$$

Это условие выражает равенство количеств тепла, протекших, соответственно, по левую и правую стороны от точки $x = 0$, в непосредственной близости от нее. Левая часть уравнения (7) для фиксированного $x < 0$ может быть представлена, используя (5), в таком виде

$$k_1 \bar{P}_1 + k_1 \bar{Q}_1 = k_1 \int_0^t P_1(x, t)\, dt + k_1 \int_0^t Q_1(x, t)\, dt. \tag{8}$$

$\bar{P}_1$ получим посредством элементарных преобразований из (5′):

$$\bar{P}_1(x, t) = \frac{-1}{2 a_1^2} \int_0^{\infty} \Phi_1(-\alpha) \left\{ 2 - \psi\left(\frac{\alpha - x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right) - \psi\left(\frac{\alpha + x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right) \right\} d\alpha, \tag{9}$$

где ψ — гауссова функция:

$$\psi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi\,. \tag{10}$$

В результате ряда подобных вычислений получим

$$\bar{Q}_1(x,t)=\frac{1}{a_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \varphi(\theta)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\theta)}}}{\sqrt{t-\theta}}\,d\theta\,. \tag{11}$$

Здесь граничный переход $x\to 0$ осуществляется непосредственно.

При помощи подобных же вычислений представим правую часть уравнения (7) для фиксированной точки $x>0$ в форме (8), где $\bar{P}_2$ и $\bar{Q}_2$ имеют вид, подобный (9) и (11). Заменяя $\bar{P}_1$, $\bar{Q}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}_2$ для $x=0$ в условии (7), представим его в виде

$$\int_0^t \frac{\varphi(\theta)\,d\theta}{\sqrt{t-\theta}}=H(t)\,, \tag{12}$$

$$H(t)=\frac{H_1(t)}{A}\,,\qquad A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{k_1}{a_1}+\frac{k_2}{a_2}\right), \tag{12$'$}$$

$$H_1(t)=k_1\bar{P}_1(0,t)+k_2\bar{P}_2(0,t)\,. \tag{12$''$}$$

Соотношение (12) представляет собой абелево интегральное уравнение для $\varphi(t)$. Легко видеть из (9), что $\bar{P}_1(0{,}0)=0$. Так же и $\bar{Q}_1(0{,}0)=0$, так что $H_1(0)=H(0)=0$. Производная $H'(\theta)$ также существует. Таким образом, (12) имеет решение, выражающееся, как известно, следующим образом:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{H'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{t-\theta}}\,. \tag{13}$$

Заменив найденную функцию φ в W_1 (3$''$) и W_2, найдем обе функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$; таким образом задача решена.

Используя (12), (12$''$), (9) и дифференцируя $H(\theta)$, представим $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}A}\int_0^t \frac{S(\theta)\,d\theta}{\sqrt{t-\theta}}\,, \tag{14}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{\theta^{3/2}}\left\{\frac{k_1}{a_1^3}\int_0^\infty \alpha\,\Phi_1(-\alpha)\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2\theta}}\,d\alpha\,+\right.$$

$$\left.+\,\frac{k_2}{a_2^3}\int_0^\infty \alpha\,\Phi_2(\alpha)\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2\theta}}\,d\alpha\right\}. \tag{14$'$}$$

К интегральному уравнению (12), определяющему φ, можно притти и другим образом, не интегрируя (2$'$) по t. Из физических соображений ясно, что количество теплоты $R_1(t)$, протекающее за время t в непосредственной близости от точки $x=0$ слева от нее, равно изменению количества теплоты в стержне A_1 за время t. То же самое следует и из уравнения теплопроводности (1′), так что

$$R_1(t)=\frac{k_1}{a_1^2}\left\{\int_{-\infty}^{0} V_1(x,t)\,dx+\int_{-\infty}^{0} W_1(x,t)\,dx-\int_{-\infty}^{0}\Phi_1(x)\,dx\right\}.$$

С помощью элементарных вычислений получаем $R_1(t)=k_1\overline{P}_1+$ $+k_1\overline{Q}_1$. Подобным же образом получим выражение для количества теплоты $R_2(t)$ справа от точки $x=0$. Приравнивая R_1 и R_2, получаем (12).

Рассмотрим частный случай, когда начальные температуры стержней A_1 и A_2 постоянны, т. е. $\Phi_1(x)=C_1, \Phi_2(x)=C_2$. Функция $S(\theta)$ из (14) вычисляется легко; замещая ее в (14), получим для φ постоянное значение φ_0:

$$\varphi_0=\left(\frac{k_1C_1}{a_1}+\frac{k_2C_2}{a_2}\right):\left(\frac{k_1}{a_1}+\frac{k_2}{a_2}\right). \tag{15}$$

Вычисляя для этого случая W_1 из (3″) и V_1 из (3′), получим для $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t)=\varphi_0-(C_1-\varphi_0)\,\psi\left(\frac{x}{2\,a_1\sqrt{t}}\right). \tag{16}$$

Таким же образом можно вычислить и $u_2(x,t)$ для A_2:

$$u_2(x,t)=\varphi_0+(C_2-\varphi_0)\,\psi\left(\frac{x}{2\,a_2\sqrt{t}}\right). \tag{16′}$$

Найденные решения совпадают с известными для этого случая формулами (19) ([1], стр. 194).

Непосредственным вычислением можно проверить, что полученные решения u_1 и u_2 в общем случае с φ из (14) удовлетворяют всем поставленным условиям.

Поступило
22 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Frank-Mises, Die Differentialgleichungen der Physik, 2, 1927.