Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. ЛАНДКОФ

О ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА МНОЖЕСТВЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 VI 1946)

1. Обозначим E произвольное замкнутое ограниченное множество z-плоскости, не содержащее внутренних точек. C_E будет обозначать линейное нормированное пространство всех вещественных непрерывных на F функций $f(z)$ с обычным определением нормы $\|f\| = \max\limits_{z \in E} |f(z)|$. Всякий линейный функционал $M[f]$, определенный на C_E, допускает, как известно, представление

$$M[f] = \int\limits_E f(z)\, d\mu(z), \tag{1}$$

$\mu(e)$ есть вещественная вполне аддитивная функция множества.

2. Дополнительное к E множество Ω состоит из областей $\{\Omega_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Обозначим через R_k границу Ω_k и положим $R = \sum\limits_{k=0}^{\infty} R_k$; тогда $E = \overline{R}$.

Обозначим $\{O_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, такую подпоследовательность областей Ω_i с границами r_k, $k = 0\ 1, \ldots$, что: 1) $E = \overline{r}$, где $r = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k$; 2) ни одна из областей O_k не может быть исключена из $\{O_k\}$ без нарушения 1). Зафиксируем в каждой области O_k по одной точке ζ_k и обозначим Λ_E вещественную линейную оболочку функций

$$\mathrm{Re}\, \frac{1}{(z-\zeta_k)^n}, \quad \mathrm{Im}\, \frac{1}{(z-\zeta_k)^n} \quad \text{и} \quad \ln \frac{1}{|z-\zeta_k|} \quad (k, n = 0, 1, \ldots)^*.$$

Основной вопрос состоит в нахождении условий для того, чтобы класс гармонических функций $\Lambda_E \subset C_E$ был плотен в C_E.

3. Наряду с Λ_E рассмотрим вещественную линейную оболочку L_E функций $\ln \frac{1}{|z-\zeta|}$, где $\zeta \in \sum\limits_{k=0}^{\infty} O_k$.

Лемма. *Множество Λ_E плотно по отношению к L_E и, обратно, L_E плотно по отношению к Λ_E.*

В силу этой леммы можно вместо Λ_E рассматривать L_E.

---

* Член $\ln \frac{1}{|z-\zeta_i|}$ выпускается, если ζ_i лежит в бесконечной области. Кроме того, если $\zeta_i = \infty$, то вместо $\mathrm{Re}\, \frac{1}{(z-\zeta_i)^n}$, $\mathrm{Im}\, \frac{1}{(z-\zeta_i)^n}$ берем $\mathrm{Re}\, z^n$, $\mathrm{Im}\, z^n$.

4. Если $\overline{L}_E \neq C_E$, то, в силу (1) и известной теоремы функционального анализа, существует такая функция множества $\mu(e) \neq 0$, что

$$\int_E \ln \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(z) = 0, \quad \zeta \in \sum_{k=0}^{\infty} O_k . \tag{2}$$

Таким образом, L_E будет плотно в C_E тогда и только тогда, когда из условия (2) будет вытекать, что $\mu(e) \equiv 0$.

5. Предполагая, что последовательность $\{O_k\}$ содержит все бесконечно-связные области Ω_i, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы класс функций Λ_E был плотен в C_E, достаточно, чтобы множество E не содержало g-неразложимого континуума.*

При этом континуум K мы называем g-неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух подконтинуумов, один из которых не пуст и не разбивает плоскости, а второй является собственным подконтинуумом данного.

6. Необходимое и достаточное условие для плотности класса Λ_E в C_E можно получить весьма просто в терминах иррегулярных точек. Из одной теоремы Валле — Пуссена ([1]) вытекает:

Теорема 2*. *Класс Λ_E плотен в C_E тогда и только тогда, когда открытое множество $\sum_{k=0}^{\infty} O_k$ не имеет иррегулярных точек.*

Заметим, что одна теорема J. L. Walsh'a ([2]), утверждающая, что класс Λ_E всегда плотен в C_E, оказывается, таким образом, неверной.

7. Если множество E содержит внутренние точки и F — его граница, то при условии, что F удовлетворяет требованиям теоремы 1 или теоремы 2, можно утверждать, что Λ_E плотно в пространстве функций, непрерывных на E и гармонических во внутренних точках E.

8. Теорема 2 может быть дословно перенесена на случай множества E, лежащего в трехмерном пространстве, только под Λ_E следует понимать линейную оболочку функций $H_k(x, y, z)$, $k = 0, 1, \ldots$, где $H_k(x, y, z)$ обозначает всякую гармоническую функцию, имеющую единственную особенность в фиксированной точке P_k в O_k и равную некоторой рациональной дроби, умноженной на $\dfrac{1}{\overline{PP_k}}$, $P = P(x, y, z)$. Полученный результат позволяет обнаружить справедливость двух теорем, доказанных Келдышем и Лаврентьевым ([3]) **.

Теорема 3. *Если E не разбивает пространства и имеет пространственную меру нуль, то всякая непрерывная на E функция $f(x, y, z)$ есть равномерный предел последовательности гармонических полиномов.*

Теорема 4. *Заключение теоремы 3 справедливо, если E есть простая жорданова поверхность (т. е. гомеоморфный образ замкнутого круга).*

Заметим, что доказательство теоремы 4 в ([3]) основано на довольно сложных соображениях и требует нетривиального подсчета.

Поступило
27 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ch. de la Vallée-Poussin, Acad. Roy. Belg., Bull. de la Classe de Sci. (5) **24**, No. 11 (1938). [2] J. L. Walsh, Bull. Am. Math. Soc., **35**, 519 (1929). [3] М. Келдыш и М. Лаврентьев, Тр. Тбилисск. математ. ин-та, **1**, 168 (1937). [4] М. Келдыш, ДАН, **18**, № 6 (1938).

* Аналогичный по существу результат был получен (повидимому, иным методом) М. Келдышем ([4]) для случая континуума, не разбивающего пространства.

** А также обобщить их на случай, когда E разбивает пространство.