Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 1

МАТЕМАТИКА

В. АНДРУНАКИЕВИЧ

ПОЛУРАДИКАЛЬНЫЕ И РАДИКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 2 VII 1946)

§ 1. Наряду с обычным определением ассоциативного кольца $\mathfrak{A}$ можно дать еще одно эквивалентное определение этого понятия, а именно

Определение 1. Множество $\mathfrak{A}$ с двумя алгебраическими операциями $+$ и $\circ$ называется ассоциативным кольцом, если имеют место следующие постулаты:

1) $\mathfrak{A}$ — абелева группа относительно операции $+$;
2) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
3) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c - a$,
$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a - a$.

Если в определении 1 положим $ab = a + b - a \circ b$, то получим обычное определение кольца. Обратно, положив в обычном определении кольца $a \circ b = a + b - ab$, получим определение 1.

Операция $a \circ b = a + b - ab$ встречалась уже в работах многих авторов (см., например, [2]). Заметим, что нуль аддитивной группы кольца является единицей относительно операции $\circ$; кроме того, $a \circ b = b \circ a$ тогда и только тогда, когда $ab = ba$.

§ 2. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ будем называть правым полурадикальным, если из равенства $x \circ a = x' \circ a$ следует $x = x'$. Это равносильно тому, что из равенства $xa = x$ следует $x = 0$. Ясно, что идемпотентный элемент, неравный нулю, не является правым полурадикальным. Заметим, что правый полурадикальный элемент определяется относительно операции $\circ$ так же, как правый неделитель нуля относительно обычного умножения.

Если $a \in \mathfrak{A}$, то правым обратным элемента a относительно операции $\circ$ или, короче, правым $\circ$-обратным элемента a будем называть элемент a_r^{-1} со свойством $a \circ a_r^{-1} = 0$. Если элемент a_r^{-1} существует, то сам элемент a называется правым $\circ$-обратимым элементом.

Аналогично определяем левый полурадикальный и левый $\circ$-обратимый элементы.

Если элемент a является одновременно левым и правым полурадикальным, то будем говорить, что a — полурадикальный элемент.

Если элемент a обладает как правым, так и левым $\circ$-обратными элементами, то эти последние совпадают. В этом случае будем говорить, что a обладает $\circ$-обратным элементом, обозначаемым a^{-1}, или что a — $\circ$-обратимый элемент. Заметим, что правый $\circ$-обратимый элемент является одновременно правым полурадикальным. Можно, однако, построить пример, когда правый

$\circ$-обратимый элемент не является левым полурадикальным. Последнее явление не имеет места, если в кольце удовлетворяются некоторые условия конечности для идеалов. Чтобы сформулировать соответствующие теоремы, определим для данного элемента a кольца $\mathfrak{A}$ отображение $\overline{a}_r$ этого кольца следующим образом: $x\overline{a}_r = x - xa$. Обозначим через $\mathfrak{A}\overline{a}_r$ совокупность $\{x\overline{a}_r\}$, где x пробегает кольцо $\mathfrak{A}$, и через $\mathfrak{Z}_{\overline{a}_r}$ совокупность таких z, что $z\overline{a}_r = 0$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{A}\overline{a}_r$ и $\mathfrak{Z}_{\overline{a}_r}$ — левые идеалы, причем $\mathfrak{A}\overline{a}_r = \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда a — левый $\circ$-обратимый элемент, и $\mathfrak{Z}_{\overline{a}_r} = 0$ тогда и только тогда, когда a — правый полурадикальный элемент. Тогда имеем:

Теорема 1. *Если в кольце $\mathfrak{A}$ имеет место условие минимальности для идеалов $\mathfrak{A}\overline{c}_r$, где $c \in \mathfrak{A}$, или же условие максимальности для идеалов $\mathfrak{Z}_{\overline{a}_r}$, то из равенства $a \circ b = 0$ следует $b \circ a = 0$, и обратно.*

Теорема 2. *Элемент a кольца $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для идеалов $\mathfrak{A}\overline{b}_r$, где $b \in \mathfrak{A}$ будет $\circ$-обратимым тогда и только тогда, когда он правый полурадикальный.*

Теоремы 1 и 2 аналогичны тем, которые имеют место для делителей нуля и обратимых элементов в случае обычного определения кольца ([3]).

§ 3. Определение 2. Кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть правым полурадикальным, если каждый его элемент является правым полурадикальным. Аналогично определяется левое полурадикальное кольцо.

Определение 3. Кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть полурадикальным, если оно одновременно является правым и левым полурадикальным, т. е. если из равенства $a \circ x = a \circ x'$, $y \circ a = y' \circ a$ следует $x = x'$, $y = y'$ для любого $a \in \mathfrak{A}$.

Определение 4. Кольцо $\mathfrak{A}$ называется радикальным ([4]), если каждый его элемент является правым $\circ$-обратимым, т. е. для каждого $a \in \mathfrak{A}$ найдется такой элемент $x \in \mathfrak{A}$, что $a \circ x = 0$.

Определение 4 означает, что радикальное кольцо образует группу относительно операции $\circ$, а потому все его элементы будут и левыми $\circ$-обратимыми. Заметим, что радикальное кольцо определяется относительно операции $\circ$ аналогично тому, как тело относительно обычного умножения, с той только разницей, что в радикальном кольце и нуль является $\circ$-обратимым элементом.

Определение 3 показывает, что полурадикальное кольцо образует полугруппу относительно операции $\circ$. Таким образом, полурадикальное кольцо определяется относительно операции $\circ$ аналогично тому, как кольцо без делителей нуля относительно обычного умножения, с той только разницей, что в полурадикальном кольце и нуль является полурадикальным элементом.

Ввиду параллелизма между определениями радикального кольца и полурадикального, с одной стороны, и тела и кольца без делителей нуля, с другой, естественно ожидать, что вопрос о вложении полурадикального кольца в радикальное будет решаться аналогично вопросу о вложении кольца без делителей нуля в тело. Действительно, имеет место теорема, аналогичная теореме Орэ ([5]).

Теорема 3. *Если для любых двух элементов a и b полурадикального кольца $\mathfrak{A}$ можно найти такие элементы x и y, что $a \circ y = b \circ x$ (в частности, это имеет место, если $\mathfrak{A}$ коммутативно), то кольцо $\mathfrak{A}$ можно вложить в некоторое радикальное кольцо $\mathfrak{R}$. Минимальное кольцо $\mathfrak{R}$ с этим свойством определяется* *однозначно с точностью до изоморфизма, и любой его элемент имеет вид* $a \circ b^{-1}$, *где* a, $b \in \mathfrak{A}$.

Кольцо $\mathfrak{R}$ будем называть правым радикальным кольцом отношений полурадикального кольца $\mathfrak{A}$. Имеет место и обратное утверждение.

Если полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ может быть вложено в правое радикальное кольцо отношений (т. е. в такое кольцо, в котором каждый элемент имеет вид $a \circ b^{-1}$, где a, $b \in \mathfrak{A}$), то в $\mathfrak{A}$ выполняется условие теоремы 3.

Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ условие теоремы 3 не выполняется, то, вообще говоря, такое кольцо нельзя вложить в радикальное. Можно построить соответствующий пример аналогично тому, как Мальцев [6] построил пример кольца без делителей нуля, которое не может быть вложено в тело. Заметим, что можно дать единое доказательство теоремы 3 и аналогичной ей теоремы Орэ для кольца без делителей нуля.

§ 4. Как известно [3], кольцо $\mathfrak{A}$ без правых делителей нуля будет телом тогда и только тогда, когда имеет место условие минимальности для идеалов $\mathfrak{A}a$. Имеет место аналогичная

Теорема 4. *Правое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ будет радикальным тогда и только тогда, когда имеет место условие минимальности для идеалов* $\mathfrak{A}\bar{a}_r$.

Достаточность условия теоремы 3 следует из теоремы 2. Необходимость следует из того, что, как мы уже отметили раньше, $\mathfrak{A}\bar{a}_r = \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда элемент a — левый $\circ$ обратимый.

Далее имеет место

Теорема 5. *Правое полурадикальное кольцо с условием минимальности для идеалов $a\mathfrak{A}$ будет нилькольцом.*

Комбинируя теорему 5 с известной теоремой Гопкинса [7] о том, что нилькольцо с условием минимальности для правых (левых) идеалов нильпотентно, получаем теорему, обобщающую результат Джэкобсона [1] для радикальных колец.

Теорема 6. *Правое полурадикальное кольцо с условием минимальности для правых идеалов нильпотентно.*

Заметим, что теорему 6 можно доказать непосредственно, так же как теорему Гопкинса, методом Брауера [8], который, собственно говоря, предполагает только, что кольцо полурадикально.

Институт математики
Московского государственного
университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Jacobson, Am. J. Math., **67**, 300 (1945). [2] L. Foster and B. Barstein, Duke Math. J., **11**, 603 (1944). [3] R. Baer, Bull. Am. Math. Soc., **48**, 630 (1942). [4] N. Jacobson, Ann. Math., **46**, 695 (1945). [5] O. Ore, ibid., **32**, 463 (1931). [6] A. Malcev, Math. Ann., **113**, 686 (1936). [7] Ch. Hopkins, Ann. Math., **40**, 712 (1939). [8] R. Brauer, Bull. Am. Soc., 48, 752 (1942).