

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

О ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ В ШЕРОХОВАТЫХ ТРУБАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 VII 1946)

§ 1. Применим феноменологическую теорию турбулентности⁽¹⁾ к решению внутренней задачи в прямой трубе кругового сечения с шероховатыми стенками. Эта задача была нами⁽²⁾ решена ранее для гладких труб без учета ламинарного граничного слоя.

Ограничиваясь однопараметровым описанием шероховатостей закономерного типа (качественное описание таких дано К. Федяевским⁽³⁾), обозначим δ среднюю высоту бугорков и δ_1 — толщину ламинарного граничного слоя. При такой модели пограничного слоя могут осуществиться два случая: 1) $\delta_1 > \delta$ и 2) $\delta_1 < \delta$; в первом обозначаем ll внутреннюю поверхность ламинарного слоя и на ней задаем граничные условия, это случай гладких труб; во втором обозначаем ss поверхность на расстоянии δ от стенки и граничные условия задаем на ней — случай шероховатых труб;

$$w|_{\eta=1} = w_l, \quad \Pi|_{\eta=1} = 0 \quad (1, 1); \quad w|_{\eta=1} = w_s, \quad \Pi|_{\eta=1} = \Pi_s \quad (1, 2)$$

Здесь w — скорость, $\eta \equiv r/r_1$, где r_1 — расстояние от оси до ll в случае гладких и до ss — шероховатых труб. Условия (1, 1) и (1, 2) существенно отличны, и при возрастании числа Рейнольдса (1, 1) переходит в (1, 2), т. е. трубы из «гладких» становятся «шероховатыми».

§ 2. Решая систему (1, 1)⁽²⁾ при граничном условии (1, 2), получим:

$$\bar{p} = p_0 + az - \Pi(\eta) \quad (2, 1); \quad w(\eta) = w_s - \frac{ar_1^2}{2} \int_{\eta}^1 \frac{\eta d\eta}{k + \varepsilon_1 \Pi(\eta)}; \quad (2, 2)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Pi^2}{d\eta} \right) + \frac{3\nu}{\varepsilon'} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Pi}{d\eta} \right) + C_2' \varepsilon_1^2 \frac{\eta^2 \Pi}{(k + \varepsilon_1 \Pi)^2} - 2C_1' \Pi = 0. \quad (2, 3)$$

Уравнение (2, 3) решаем линеаризацией⁽²⁾ и получаем

$$\Pi(\eta) = \Pi_s + \Pi_m^{(0)} \pi(\eta); \quad \pi(\eta) = \frac{1}{(1 - \eta_1^2)^2} [1 - \eta^4 - 2\eta_1^2(1 - \eta^2)];$$

$$\Pi_m^{(0)} = \Pi_m - \Pi_s. \quad (2, 4)$$

Π_m — максимальное значение турбулентного давления Π , η_1 — точка максимума: $\Pi_m = \Pi(\eta_1)$. Подставляя (2, 4) в (2, 2) и выполняя квадратуру, получаем профиль скоростей в виде:

$$w(\eta) = WS(\eta) + w_s; \quad W \equiv \frac{-ar_1^3}{2K_m^{(0)}}; \quad (2, 5)$$

$$S(\eta) \equiv \int_{\eta}^1 \frac{\eta d\eta}{x - \pi(\eta)} = \frac{1 - \eta_1^2}{4\sqrt{1 - \eta_1^2}} \ln \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{\eta^2 - \alpha_1^2} \frac{\alpha^2 - \eta^2}{\alpha^2 - 1} \right).$$

K — коэффициент турбулентной вязкости: $K = \varepsilon_1 \Pi$; $K_m^{(0)} \equiv K_m - K_s = \varepsilon_1 \Pi_m^{(0)}$.

$$\alpha^2, \alpha_1^2 \equiv \eta_1^2 \pm (1 - \eta_1^2) \sqrt{1 + x}; \quad x \equiv \frac{k + K_s}{K_m^{(0)}}. \quad (2, 6)$$

Решение (2, 5) содержит 4 постоянные и охватывает случаи как гладких, так и шероховатых труб. Классифицируя постоянные, разобьем их на три группы:

1) Постоянные, характеризующие физическую природу жидкости (ρ — плотность, k — вязкость), и постоянные, которые надо задать, чтобы воспроизвести конкретный поток, т. е. определяющие тождественность (а не только подобие) в пределах допущенных пренебрежений. Это суть:

$$\rho, k, |a|, r_2, \delta; \quad P \equiv k^{-1} \sqrt{|a| r_2^3 \rho}; \quad S \equiv \frac{\delta}{r_2} \quad (2, 7)$$

— назовем их фундаментальные постоянные; они те, которые, согласно «принципу феноменологического детерминизма», определяют условия, которые надо уметь воспроизвести для создания тождественных состояний (потоков).

2) Феноменологические коэффициенты теории $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1$ (входящие в C_1', C_2').

3) Различные средние значения и значения в отдельных точках. Сюда относятся Π_m, η_1, x .

Введем еще $w_0 = w(0)$, w_c — скорость среднюю по сечению $\Phi \equiv w_c / w_0$, λ — коэффициент сопротивления и Re — число Рейнольдса. Постоянные этой группы назовем характеристиками.

Полная теория должна выразить постоянные 2-й и 3-й групп через фундаментальные. Феноменологическая теория этого сделать не может — это задача статистической. Ограничиваясь рамками первой, надо обратиться к опыту, взяв из него выражение для «основных характеристик».

§ 3 Основными характеристиками для гладких труб ($\delta = 0$) выбираем: $\eta_1, x, \delta' \equiv \delta_1 / r_1$ — относительная толщина ламинарного слоя, они безразмерны и, стало быть, функции одного числа P . Из (4)

$$\eta_1 = 0,5; \quad x = 17,8P^{-1}; \quad \delta' = 11,6P^{-1} \quad (3 \cdot 10^3 < P < 10^6). \quad (3, 1)$$

Подставляя (3, 1) в (2, 5), пренебрегая x^2 и δ'^2 , вычисляя также характеристики, получаем:

$$\frac{w(\eta)}{v} = P \left\{ 3,84 \lg \left[0,225 P \frac{1 - \eta^2}{0,5 + \eta^2} + 2 \frac{0,125 + 2\eta^2 - \eta^4}{(0,5 + \eta^2)^2} \right] + 5,80 \right\} \quad (0 \leq \eta \leq 1). \quad (3, 2)$$

$$Re = P (7,69 \lg P + 3,50) \quad (3, 3); \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,92 \lg P + 0,87. \quad (3, 4)$$

Здесь скорость $v \equiv \nu r_2^{-1}$. В формуле (3, 2) можно пренебречь вторым членом в квадратных скобках. На рис. 1 нанесены профили, вычисленные по (3, 2) для $P = 3550$ и $P = 78,4 \cdot 10^3$, что соответствует $Re = 1,05 \cdot 10^3$ и $Re = 3,24 \cdot 10^6$. На рис. 2 изображен $\lg(1000\lambda)$, вычисленный по (3, 4). Экспериментальные точки нанесены кружками.

§ 4. Полагая в формуле (2, 5) $\eta_1 = 0,5$ и пренебрегая членами с x^2

$$w(\eta) = w_s + W 0,432 \lg \left\{ \frac{4}{x} \frac{1 - \eta^2}{0,5 + \eta^2} + 2 \frac{0,125 + 2\eta^2 - \eta^4}{(0,5 + \eta^2)^2} \right\} \quad (0 \leq \eta < 1), \quad (4, 1)$$

или, пренебрегая вторым членом в фигурных скобках,

$$w(\eta) = w_s + W 0,432 \lg \left\{ \frac{4}{x} \frac{1 - \eta^2}{0,5 + \eta^2} \right\} \quad (0 \leq \eta < 0,95), \quad (4, 2)$$

если x не больше 0,05. Формулу (4, 2) можно записать так:

$$\frac{w_0 - w(\eta)}{W} = 0,432 \left(0,301 - \lg \frac{1 - \eta^2}{0,5 + \eta^2} \right) \quad (0 \leq \eta < 0,95). \quad (4, 3)$$

Правая сторона (4, 3) не зависит от P и S , т. е. является универсальной функцией от η ; факт, что левая сторона должна быть универсальной функцией от η , отмечался в литературе; Стантон (5) так

формулировал эмпирический закон, который был затем обобщен Карманом (6). Для дальнейшего сравнения с опытом обратимся к Никурадзе (7), исследовавшему потоки для $S^{-1} = 15; 30,6; 60; 126; 252; 507$ и чисел Рейнольдса $10^4 < Re < 10^6$. По его данным, легко определить η_1 (оно, по-прежнему, 0,5) и K_m . Пограничные же характеристики w_s и K_s неточность измерения и неполнота данных не позволяют непосредственно определить. Если для w_s взять значение при $y = 0$ (где y — расстояние от стенки, приводимое И. Никурадзе), которое получено экстраполяцией и носит условный характер, то, проведя профиль скоростей через экспериментальную точку w_0 , можно определить K_s или, что удобнее, x . Так получаем для профилей: № 6: $S^{-1} = 15$, $P = 26,5 \cdot 10^3$, $x = 0,04$; № 13: $S^{-1} = 30,6$, $P = 34,2 \cdot 10^3$, $x = 0,032$; № 20: $S^{-1} = 60$, $P = 32,2 \cdot 10^3$, $x = 0,024$. На рис. 3 нанесен график функции от η (4,3), на него нанесены экспериментальные точки профилей №№ 6, 13, 20 и гладкого из (4). На рис. 4 изображены профили $w(\eta)/w_0$, вычисленные по формуле (4, 1) для тех же случаев, а также профиль гладкой трубы (при $Re = 7,25 \cdot 10^5$).

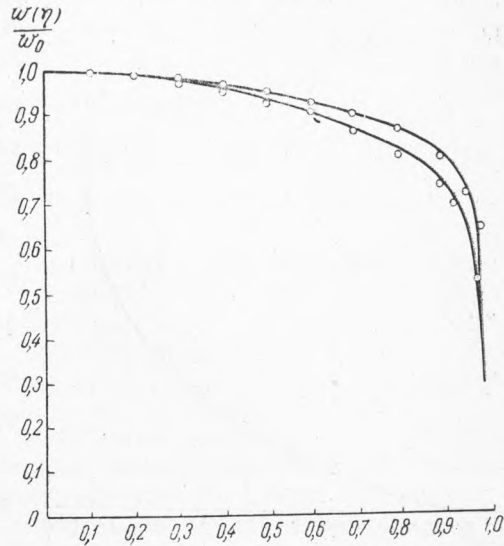


Рис. 1

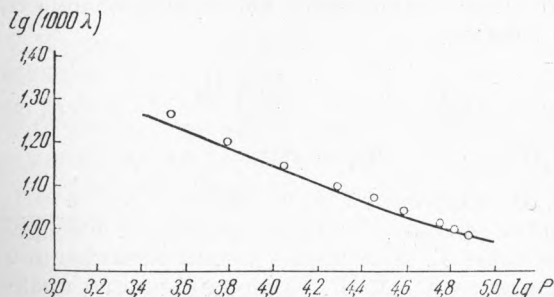


Рис. 2

§ 5. Метод линеаризации, примененный при решении уравнения (2, 3), хорош, если удачно выбрана отправная функция; допустимость взятия в качестве ее прямой $\Pi = b$ может быть физически мотивирована, но, так как не была еще доказана физическая правильность уравнения (2, 3), мотивировка не имеет полной убедительности. Можно уравнение (2, 3) исследовать численным интегрированием. Так как C_1' и C_2' численно неизвестны и так как характер задачи не позволяет задать на границе, кроме Π_s , наклон Π' (задача типа Дирихле), то приходится рассматривать трехпараметровое семейство интегральных кривых $\Pi = \Pi(\eta; \Pi_0, C_1', C_2')$. Применяем способ парабол; интервал $0 < \eta < 1$ разбиваем точками $0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ и через каждую проводим параболу

$$f_n(\eta) = a_n + a_n' \eta + a_n'' \eta^2. \quad (5, 1)$$

Из условий $f_n(\eta_n) = f_{n+1}(\eta_n)$; $f_n'(\eta_n) = f_{n+1}'(\eta_n)$ и требования, чтобы f_n удовлетворяла уравнению (2, 3) в η_n , получаем рекуррентные формулы для a_n , a_n' , a_n'' . Так было вычислено несколько десятков интегральных кривых. Рассмотрение их приводит к заключению: при значениях C_1' порядка $4 \cdot 10^3$ и C_2' порядка $2 \cdot 10^{11}$ (в CGS-

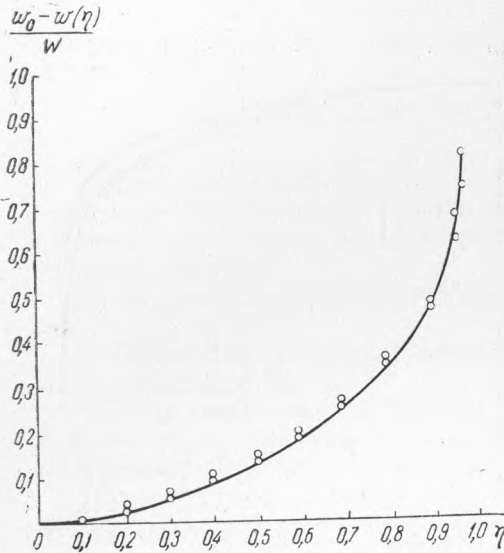


Рис. 3

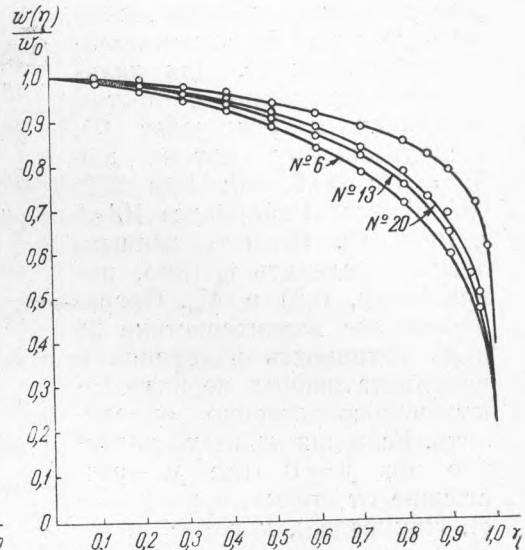


Рис. 4

системе) можно удовлетворить граничным условиям, и кривые имеют ожидаемый вид, близкий к полученным линеаризацией и к экспериментальным точкам в интервале $0,35 < \eta < 0,95$, где измерения Никурадзе можно считать достоверными. При малых числах Рейнольдса интегральные кривые ближе к эксперименту, чем при больших. Ответственность за это надо возложить на приближенность использованных уравнений состояния

$$\begin{aligned} \Pi_{ik}' &= -\varepsilon_1 \Pi^n \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right); & \vec{J} &= -\varepsilon_1 \Pi^n \nabla \Pi; \\ \vec{P} &= -\varepsilon_3 \Pi^n \Delta \bar{p}; & \Psi_1 &= g \Pi^\alpha \end{aligned} \quad (5, 2)$$

(см. ⁽¹⁾), причем уравнение (2, 3) получается при гипотезе $n = \alpha = 1$. Численной проверке эта гипотеза должна быть подвергнута измерением Π ; такие измерения проделаны Е. Минским ⁽⁸⁾, они качественно подтверждают степенную зависимость $K = \varepsilon_1 \Pi^n$. Количественного сравнения сделать нельзя, так как опыты делались в трубе прямоугольного сечения. Сравнение результатов численного интегрирования с данными Никурадзе позволяет думать, что $n = 1$ для малых Re и с возрастанием Re n растет (не резко), $1 < n < 3$. Для практических целей принятие $n = \alpha = 1$ является достаточным приближением.

Ленинградский государственный университет

Поступило
25 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹V. Nevzgljadov, J. of Physics., 9, No. 3 (1945). ²В. Г. Невзглядов, Изв. АН СССР, ОТН, № 9 (1945). ³К. К. Федяевский, Тр. ЦАГИ, 250 (1936). ⁴I. Nikuradse, VDI, 356 (1932). ⁵T. E. Stanton, Proc. Roy. Soc. (A), 85, p. 366 (1911). ⁶T. Karman, J. Aeron. Sci., № 1 (1934). ⁷I. Nikuradse, VDI, 361 (1933). ⁸Е. М. Минский, ДАН, 49, № 5 (1945).