Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 2

МАТЕМАТИКА

С. НИКОЛЬСКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ, s-я ПРОИЗВОДНАЯ КОТОРОЙ ИМЕЕТ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 VII 1946)

С. Н. Бернштейн в своей работе (1) показал существование предела

$$\mu(s) = \lim_{n \to \infty} n^s E_n(|x|^s) \quad (s > 0), \tag{1}$$

где $E_n(f)$ обозначает наилучшее приближение функции $f(x)$ при помощи многочлена степени n на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Далее С. Н. Бернштейн в другой заметке (2) доказал, что если функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i |x - a_i|^s \quad (s > 0), \tag{2}$$

где m — конечное число, A_i — некоторые вещественные коэффициенты и $-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 1$, то имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(f) \approx \frac{\varkappa \mu(s)}{n^s} \quad (n \to \infty), \tag{3}$$

где $\mu(s)$ определяется при помощи (1), а

$$\varkappa = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |A_i| (1 - a_i^2)^{s/2}. \tag{4}$$

Базируясь на этих результатах, в настоящей заметке я доказываю:

Теорема 1. *Если*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i |x - a_i|^s, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| < \infty, \tag{5}$$

$$\varkappa = \max_{1 \leqslant i < \infty} |A_i| (1 - a_i^2)^{s/2} \quad (s > 0), \tag{6}$$

то справедливо асимптотическое равенство (3).

Теорема 2. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (абсолютно непрерывную) производную порядка $s-1$, являющуюся, в свою очередь, неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$ со следующими свойствами:*

1) *$\varphi(x)$ конечна на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет разрывы только первого рода;*

2) $\varphi(x)$ *имеет по меньшей мере один существенный разрыв в некоторой точке* x_* *интервала* $-1<x<1$ $(\varphi(x_*+0)\neq\varphi(x_*-0))$.

Тогда

$$E_n(f)\approx\frac{\varkappa\mu(s)}{2s!\,n^s}\quad(n\to\infty),\tag{7}$$

где

$$\varkappa=\max_{-1<x<1}|\varphi(x+0)-\varphi(\varkappa-0)|(1-x^2)^{s/2}.\tag{8}$$

Примечание 1. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 2 и, кроме того, $|f^{(s)}(x)|\leqslant K$ для $-1\leqslant x\leqslant 1$, то, очевидно, для нее $\varkappa\leqslant 2K$. Поэтому, в силу теоремы 2, для всякой такой функции справедливо неравенство

$$\lim_{n\to\infty} n^sE_n(f)\leqslant\frac{K\mu(s)}{s!},\tag{9}$$

которое обращается в равенство для функций этого класса, имеющих скачок производной $f^{(s)}(x)$, равный $2K$ в точке $x=0$ (и только для них).

В моей заметке (3) (см. также (4)) приводится пример функции, удовлетворяющей условию Липшица с константой $K=1$, для которой $\limsup\limits_{n\to\infty} nE_n(f)=\frac{\pi}{2}$ $(>\mu(1))$, поэтому, если $|f^{(s)}(x)|\leqslant K$ и $f^{(s)}(x)$ имеет разрывы второго рода, то неравенство (9), вообще говоря, не соблюдается.

Доказательство теоремы 1. Пусть $-1<a<1$ и $E_n(f;c,d)$ обозначает наилучшее приближение f на отрезке (c,d), тогда

$$\begin{aligned}E_n(|a-x|^s;-1,+1)&\leqslant E_n(|a-x|^s;a-2,a+2)=\\&=E_n(|x|^s;-2,2)=2^sE_n(|y|^s;-1,+1)\leqslant c/n^s,\end{aligned}\tag{10}$$

где c — константа, не зависящая от n и a $(-1\leqslant a\leqslant 1)$.

Зададим теперь $\varepsilon>0$ и подберем m так, чтобы

$$\sum_{m+1}^{\infty}|A_i|<\varepsilon,\qquad m\geqslant r,\tag{11}$$

где r — тот из индексов i, для которого достигается максимум (6).

Тогда, полагая

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}A_i|x-a_i|^s+\sum_{i=m+1}^{\infty}A_i|x-a_i|^s=g(x)+r(x),$$

будем, на основании приведенного утверждения С. Н. Бернштейна, иметь

$$(1-\varepsilon)\frac{\varkappa\mu(s)}{n^s}<E_n(g)<(1+\varepsilon)\frac{\varkappa\mu(s)}{n^s},\quad n>N,$$

при N достаточно большом и вследствие неравенств (10) и (11)

$$E_n(r)\leqslant\sum_{m+1}^{\infty}|A_i|E_n(|x-a_i|^s)<\frac{\varepsilon c}{n^s}.$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
E_n(f) &\leq E_n(g) + E_n(r) < [(1+\varepsilon)\varkappa\mu(s) + \varepsilon c]\frac{1}{n^s}, \\
E_n(f) &\geqslant E_n(g) - E_n(r) > [(1-\varepsilon)\varkappa\mu(s) - \varepsilon c]\frac{1}{n^s} \quad (n > N).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Этим теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$
f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{s-1} \varphi(t)\, dt + P_{s-1}(x), \tag{13}
$$

где $P_{s-1}(x)$ есть некоторый многочлен степени $s-1$.

Так как функция $\varphi(x)$ имеет на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ разрывы только первого рода, то она ограничена на нем, и существует самое большее счетное множество точек $a_1, a_2, \ldots$, принадлежащих к интервалу $-1 < x < 1$, где $\varphi(x)$ терпит разрывы. Свойства функции $\varphi(x)$ и равенство (13) не нарушатся, если мы видоизменим $\varphi(x)$ в точках a_i так, чтобы $\varphi(a_i+0) = \varphi(a_i)$, что мы и будем предполагать. Из этих свойств следует также, что

$$
A_i = \varphi(a_i+0) - \varphi(a_i-0) \to 0 \quad (i \to \infty)
$$

и, таким образом, существует r, при котором

$$
\begin{aligned}
\varkappa &= \max_x |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)|\,(1-x^2)^{s/2} = \\
&= \max_i |A_i|\,(1-a_i^2)^{s/2} = |A_r|\,(1-a_r^2)^{s/2}.
\end{aligned}
$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $m > r$ так, чтобы $|A_i| < \varepsilon$ $(i = m+1, m+2, \ldots)$.

Введем в рассмотрение элементарные функции скачков, определяемые равенствами

$$
\sigma_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant a, \\ 0 & t < a, \end{cases}
$$

и заметим, что

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{s-1} \sigma_a(t)\, dt &= \left\{ \begin{matrix} \dfrac{(x-a)^s}{\Gamma(s+1)} & x \geqslant a \\ 0 & x < a \end{matrix} \right\} = \\
&= \frac{|x-a|^s + (x-a)^s}{2\Gamma(s+1)}, \quad s \text{ нечетное.}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Положим

$$
\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \sigma_{a_i}(t) + r(t) = g(t) + r(t). \tag{15}
$$

Нетрудно видеть, что колебание функции $r(t)$ в любой точке сегмента $-1 \leqslant t \leqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$
|r(t+0) - r(t-0)| < \varepsilon;
$$

поэтому можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любых значений t' и t'' из сегмента $-1 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяющих неравенству $|t'-t''| < \delta$, выполняется $|r(t') - r(t'')| < 2\varepsilon$.

Таким образом, модуль колебания *

$$\omega(h)=\sup_{\substack{|t'-t''|\leqslant h \\ -1\leqslant t'<t''\leqslant 1}}|r(t')-r(t'')|$$

функции $r(t)$ подчиняется при $h<\delta$ неравенству $\omega(h)<2\varepsilon$ и, на основании неравенства Джэксона,

$$E_n(r)<C\omega(2/n)<2\varepsilon C \quad (2/\delta<n), \tag{16}$$

где C — абсолютная константа.

Вследствие (13), (14) и (15) функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{2s!}\sum_{i=1}^{m}A_i|x-a_i|^s+R(x)+Q_s(x), \tag{17}$$

где $Q_s(x)$ есть некоторый многочлен степени s, а $R(x)$ — функция, полученная путем s-кратного интегрирования функции $r(x)$. При этом, на основании неравенства Джэксона (для функций, имеющих s-ю производную), из (16) следует

$$E_n(R)<\varepsilon C_1/n^s \quad (n>N)$$

при достаточно большом N, где C_1 — постоянная.

Применив теперь приведенный в начале статьи результат С. Н. Бернштейна, подобно тому как это было сделано при доказательстве теоремы 1, мы придем к неравенствам (12), где надо заменить r и $\varkappa$, соответственно, на R и $\varkappa/2s!$ и считать, что $g(x)$ есть первый член правой части (17).

Этим, приняв во внимание произвольную малость ε, теорема 2 доказана.

Примечание 1. Нет никакого сомнения в том, что утверждение, высказанное в теореме 2, остается в силе и при четном s. В его формулировке нужно заменить только $\mu(s)$ на другую константу $\nu(s)=\lim\limits_{n\to\infty}n^sE_n(x|x|^{s-1})$.

Это видно из того, что правая часть (11) в случае четного s заменяется выражением $\dfrac{(x-a)\,|x-a|^{s-1}+(x-a)^s}{2\Gamma(s+1)}$.

Над доказательством существования предела $\nu(s)$ и получением для функции $(a-x)\,|a-x|^s$ теорем, аналогичных теоремам Бернштейна, приведенным в начале заметки, в настоящее время работает И. И. Ибрагимов.

Обобщение теоремы 2 на s нецелое также связано с асимптотическими свойствами наилучшего приближения функции, записанной в фигурных скобках (14).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
22 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., № 2, 169 (1938). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, 18, № 7 (1938). [3] С. Никольский, ДАН, 52, № 1 (1946). [4] С. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4 (1946).

* Мы употребляем этот термин вместо «модуль непрерывности», имея в виду, что $r(x)$ может быть разрывной. Неравенство Джэксона остается в силе без изменения в доказательстве и в этом случае.