Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. ВАГНЕР

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ЛАГРАНЖА ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VII 1946)

Рассматривая задачу Лагранжа для кратных интегралов, мы будем пользоваться терминологией и обозначениями предыдущей заметки (1).

Допустимая m-мерная поверхность называется экстремальной поверхностью, если существует система $m(n-m)+1-r$ функций $\lambda_u = \lambda_u(t^a)$ таких, что имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial t^a}(\lambda_0 L^a_\alpha + \lambda_u \overset{u}{f}{}^a_\alpha) - \partial_\alpha(\lambda_0 L + \lambda_u \overset{u}{f}) = 0\,, \qquad (1)$$
$$(L^a_\alpha = \partial L/\partial \xi^a_\alpha,\ \ \overset{u}{f}{}^a_\alpha = \partial \overset{u}{f}/\partial \xi^\alpha_a,\ \partial_\alpha = \partial/\partial \xi^\alpha),$$

где $\lambda_0 = 1$ или $\lambda_0 = 0$. Экстремальная поверхность называется анормальной, если существует система функций λ_u такая, что равенства (1) выполняются при условии $\lambda_0 = 0$. В противном случае экстремальная поверхность называется нормальной. Очевидно, что в случае нормальной экстремальной поверхности система функций λ_u определяется однозначно *. Анормальная экстремальная поверхность называетсоя слабо анормальной, если существует система функций λ_u, удовлетворяющих уравнениям (1) при условии $\lambda_0 = 1$. В противоположном случае она называется сильно анормальной. До сих пор мы не имеем доказательства в общем случае задачи Лагранжа для кратных интегралов того, что допустимая поверхность, дающая экстремум интегралу, должна быть необходимо экстремальной **. Однако нормальные и слабо анормальные экстремальные поверхности появляются также в связи с установлением достаточных условий экстремума, рассмотренных в предыдущей заметке.

Пусть

$$x^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = l^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}}(\xi^\lambda, \eta^i) \quad \text{или} \quad x_\alpha = l^\alpha_a(\xi^\lambda, \eta^i),$$
$$(i, j = 1, \ldots, r-1) \qquad (2)$$

будут параметрические уравнения индикатрис для задачи Лагранжа. Ориентировочное m-направление в некоторой точке X_n называется допустимым, если оно может быть представлено в $M_{\binom{n}{m}}$ с помощью луча, встречающего индикатрису. Таким образом, допустимыми поверх-

* Для случая обыкновенной задачи Лагранжа см. (2).
** Для $n = 4$, $m = 2$, $r = 4$ см. (3).

ностями задачи Лагранжа являются ориентировочные поверхности, касательные m-направления которых допустимы.

Пусть $C^p_\alpha = C^p_\alpha(\xi^\lambda, \eta^i)$ будет система $n-m$ линейно независимых ковариантных векторов, удовлетворяющих уравнениям $l^\alpha_a C^p_\alpha = 0$ $(p, q = m+1, \ldots, n)$. Обозначая $g^p_{ia} = C^p_\alpha \partial_i l^\alpha_a$ $(\partial_i = \partial/\partial\eta^i)$, мы получаем, что g^p_{ia} являются компонентами аффинора. Легко показать, что ранг матрицы $\| g^p_{ia} \|$ с $r-1$ строками и $m(n-m)$ столбцами равняется $r-1$ и, следовательно, система уравнений $g^p_{ia} V^a_p = 0$ допускает $m(n-m)+1-r$ линейно независимых систем решений $\overset{u}{V}{}^p_a$ $(u = r+1, \ldots, m(n-m)+1)$. Уравнения

$$l^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = 1; \quad \partial_i l^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = 0 \qquad (3)$$

определяют семейства касательных гиперплоскостей к индикатрисам, которые не проходят через центры локальных $M_{\binom{n}{m}}$. Семейство главных касательных гиперплоскостей может быть определено уравнениями

$$l^\alpha_a y^b_\alpha = \delta^b_a; \quad \partial_i l^\alpha_a y^a_\alpha = 0. \qquad (4)$$

Если $\overset{0}{l}{}^a_\alpha$ — решения уравнений (4), то семейство главных касательных гиперплоскостей может быть определено уравнениями

$$y^a_\alpha = \overset{0}{l}{}^a_\alpha + \lambda_u \overset{u}{V}{}^a_p C^p_\alpha, \qquad (5)$$

где λ_u — произвольные параметры.

Определяя гиперплоскость, проходящую через центр $M_{\binom{n}{m}}$, уравнением $Y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} x^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = 0$, мы получаем, что семейство центральных касательных гиперплоскостей индикатрис может быть задано уравнениями

$$l^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} Y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = 0; \quad \partial_i l^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} Y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} = 0. \qquad (6)$$

Центральную касательную гиперплоскость индикатрисы будем называть собственной, если она не является касательной гиперплоскостью к самому конусу Грассмана. Можно показать, что семейство собственных центральных касательных гиперплоскостей определяется уравнениями

$$\frac{1}{(m-1)!} \mathfrak{E}^{ab_1 \cdots b_{m-1}} l^{\beta_1}_{b_1} \cdots l^{\beta_{m-1}}_{b_{m-1}} Y_{\alpha\beta_1 \cdots \beta_{m-1}} = \lambda_u \overset{u}{V}{}^a_p C^p_\alpha, \qquad (7)$$

где не все параметры λ_u равны нулю. Если индикатрисы определяются неявными уравнениями $L(\xi^\alpha, x^\alpha_a) = 1$; $\overset{u}{f}(\xi^\alpha, x^\alpha_a) = 0$, мы имеем

$$\overset{u}{f}{}^a_\alpha = \overset{u}{V}{}^a_p C^p_\alpha, \qquad (8)$$

и, следовательно, главные касательные гиперплоскости индикатрис определяются уравнениями

$$y^a_\alpha = L^a_\alpha + \lambda_u \overset{u}{f}{}^a_\alpha. \qquad (9)$$

Как мы видели в предыдущей работе, нахождение достаточных условий задачи Лагранжа для кратных интегралов тесно связано с построением градиентного грассманова поля нецентральных касательных гиперплоскостей к индикатрисам, т. е. такого поля $y_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}} =$

$=y_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}}(\xi^\lambda)$, где ковариантный m-вектор $y_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ является альтернированной производной некоторого $m-1$-вектора $\varphi_{\beta_1 \ldots \beta_{m-1}}$. Точки касания гиперплоскостей поля с индикатрисами определят поле X_n^m измеримых m-направлений в X_n, называемое геодезическим X_n^m. Можно показать, что каждая допустимая поверхность, могущая быть вмещенной в геодезическое X_n^m, удовлетворяет уравнениям (1), где $\lambda_0=1$ и функции λ_u, согласно (9), определяют главные касательные гиперплоскости индикатрис, ассоциированные с касательными гиперплоскостями соответствующего поля. Таким образом, допустимые поверхности, могущие быть вмещенными в геодезическое X_n^m, являются нормальными или слабо анормальными экстремальными поверхностями. Рассмотрим теперь грассманово поле собственных центральных касательных гиперплоскостей к индикатрисам $Y_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}}=Y_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}}(\xi^\lambda)$ в X_n. Такое поле назовем градиентным, если однородные координаты гиперплоскостей могут быть выбраны так, что ковариантный m-вектор $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ является альтернированной производной некоторого $m-1$-вектора. Точки касания гиперплоскостей поля определяют поле X_n^m допустимых m-направлений в X_n, которое мы будем называть анормально геодезическим X_n^m. Может быть показано, что допустимая поверхность, могущая быть вмещенной в анормально геодезическое X_n^m, удовлетворяет уравнениям (1), где $\lambda_0=0$, а функции λ_u связаны уравнениями (7) и (8) с центральными касательными гиперплоскостями поля. Таким образом, каждая допустимая поверхность, могущая быть вмещенной в анормально геодезическое X_n^m, является анормальной экстремальной поверхностью. Применяя этот результат к случаю обыкновенной задачи Лагранжа, где $m=1$, мы получаем, что анормальные экстремали совпадают с характеристиками дифференциального уравнения в частных производных, определяемого полем конических поверхностей, соответствующих индикатрисам, так как в этом случае локальные $M_{\binom{n}{m}}$ совпадают с касательными E_n.

X_n^m может интерпретироваться как поле локальных центральных m-мерных плоскостей в X_n, где каждая локальная плоскость задана в касательном E_n, ассоциированном с соответствующей точкой X_n. Мы предположим, что это X_n^m оснащено с помощью поля X_n^{n-m} $n-m$-направлений в X_n. Пусть B_a^α, B_α^a и C_p^α, C_α^p будут промежуточные компоненты единичных аффиноров в X_n^m и в X_n^{n-m}. Рассмотрим уравнения в вариациях для системы уравнений Пфаффа $B_\alpha^a d\xi^\alpha=0$, которая определяет кривые в X_n^{n-m}, предполагая, что вектор вариации v^α лежит в X_n^m, т. е. $v^\alpha=B_a^\alpha v^a$, мы получаем

$$\frac{dv^a}{dt}+\Gamma_{pb}^a \frac{(d\xi)^p}{dt} v^b=0, \tag{10}$$

где

$$\Gamma_{pb}^a=-2C_p^\omega B_b^\beta \partial_{[\omega} B_{\beta]}^a; \qquad (d\xi)^p=C_\alpha^p d\xi^\alpha.$$

Рассматривая вектор v^a как радиус-вектор точки в локальной плоскости X_n^m, мы получаем, что дифференциальные уравнения (10) определяют центрально-аффинные отображения локальных плоскостей X_n^m вдоль кривых в X_n^{n-m}. Эти центрально-аффинные отображения дают возможность определить абсолютное дифференцирование аффиноров и аффинорных плотностей в X_n^m вдоль кривых в X_n^{n-m} ([4]). Предположим, что измерение площади определено в локальных плоскостях X_n^m

с помощью скалярной плотности $\mathfrak{l}$ веса -1. Отношение ковариантной производной этой плотности к самой плотности

$$h_p = \frac{D_p \mathfrak{l}}{\mathfrak{l}} = \partial_p \ln \mathfrak{l} + \Gamma^a_{pa} \tag{11}$$

является ковариантным вектором в X_n^{n-m}, называемым вектором средней кривизны для X_n^m с заданной ареальной метрикой.

Уравнения $\eta^i = \eta^i(\xi^\lambda)$ определяют поле X_n^m допустимых m-направлений. Функция L определяет ареальную метрику в локальных плоскостях X_n^m. Каждая главная касательная гиперплоскость в некоторой точке индикатрисы определяет $n-m$-направление в X_n, называемое трансверсальным $n-m$-направлением для допустимого m-направления, соответствующего данной точке индикатрисы. Предположим, что X_n^m оснащено с помощью поля X_n^{n-m} трансверсальных $n-m$-направлений $y^a_\alpha = l^a_\alpha(\xi^\lambda)$. l^α_a и l^a_α могут рассматриваться, как промежуточные компоненты единичного аффинора оснащенного X_n^m относительно специальных локальных систем координат, где $\mathfrak{l} = 1$.

Согласно (4) мы можем выразить вектор средней кривизны для X_n^m так:

$$h_p = l^a_\alpha \partial_p l^\alpha_a + C^\varkappa_p \partial_a l^a_\alpha \quad (\partial_a = B^\varkappa_a \partial_\varkappa, \quad \partial_p = C^\varkappa_p \partial_\varkappa), \tag{12}$$

где производные ∂_p вычисляются, считая η^i постоянными.

Пусть $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s^a)$ будут уравнения допустимой поверхности, вмещенной в X_n^m, где параметры s^a выбраны так, что имеет место соотношение $L(\xi^\varkappa, \partial\xi^\varkappa/\partial s^a) = 1$. Легко показать, что $l^\varkappa_a$ могут быть выбраны так, что на поверхности выполняются равенства $\partial\xi^\varkappa/\partial s^a = l^\varkappa_a$. В этом случае на поверхности $\partial_a = \partial/\partial s^a$. Из (12) следует, что вектор средней кривизны в точках поверхности зависит только от самой поверхности и ее оснащения, но не от X_n^m, куда она вмещена. Это дает возможность ввести понятие вектора средней кривизны для допустимой поверхности с трансверсальным оснащением. Согласно (5) или (9) трансверсальное оснащение поверхности может быть определено заданием системы функций $\lambda_u = \lambda_u(s^a)$. Можно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial s^a}\left(L^a_\alpha + \lambda_u \overset{u}{f}{}^a_\alpha\right) - \partial_\alpha\left(L + \lambda_u \overset{u}{f}\right) = C^p_\alpha h_p, \tag{13}$$

что доказывает теорему:

Нормальные и слабо анормальные экстремальные поверхности задачи Лагранжа для кратных интегралов совпадают с допустимыми поверхностями, которые могут быть оснащены трансверсально так, что они становятся нулевой средней кривизны. В случае нормальной экстремальной поверхности это трансверсальное оснащение определяется однозначно.

Поступило
17 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Вагнер, ДАН, **54**, № 6 (1946). [2] G. A. Bliss, Trans. Am. Math. Soc., 43, 365 (1938). [3] Ch. B. Barker, Am. J. Math., **67**, 256 (1945). [4] J. A. Schouten u. E. R. van Kampen, Math. Ann., **103**, 752 (1930).