Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 9

МАТЕМАТИКА

Э. С. ЦИТЛАНАДЗЕ

К ВОПРОСУ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1947)

В настоящей статье изучается задача о собственных значениях нелинейных операторов L, порожденных дифференциалом Фреше ([1]) четного, слабо непрерывного функционала f в вещественном гильбертовом пространстве H. Доказывается существование бесконечного множества различных, нормированных, собственных элементов и выясняется (теорема 4) условие появления континуальных систем таких элементов. Таким образом, здесь обобщаются некоторые результаты Л. А. Люстерника ([2]), В. И. Соболева ([3]), автора ([4, 6]) и, в некотором смысле, L. Lichtenstein'a ([5]).

Пусть S — гильбертова единичная сфера, S_1— поверхность ее, т. е. множество точек $a \subset S$, для которых $\|a\|=1$. Если a — некоторая точка S_1, то $-a$ назовем диаметрально противоположной точкой и обратно. Пусть f — слабо непрерывный функционал в S и $f(a)=f(-a)$. Идентифицируя таким образом диаметрально противоположные точки, получим гильбертову проективную сферу S_1^*, для которой известно, что на ней существует множество любой категории ([6]).

Предположим, что f в каждой точке его определения имеет дифференциал $df(a, h)$ в смысле Фреше.

Рассмотрим в S_1^* некоторый топологический класс $[A]$ ([3]). Обозначим $C(A)=\min\limits_{A\subset[A]} f$ и $c=\sup\limits_{[A]} C(A)$. Число c обладает свойствами: 1) $c \geqslant C(A)$ для любого $A\subset[A]$; 2) для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое множество $A_\varepsilon\subset[A]$, что $C(A_\varepsilon)>c-\varepsilon$. A_ε назовем ε-максимальным множеством класса $[A]$. Если множества класса $[A]$ компактны, то существует элемент $a_\varepsilon\subset A_\varepsilon$, на котором достигается минимум функционала f. Обозначим через $[c-\varepsilon\leqslant f\leqslant c+\varepsilon]$ множество элементов $a\subset S_1$, для которых $c-\varepsilon\leqslant f\leqslant c+\varepsilon$.

Пусть L — оператор (вообще нелинейный), порожденный дифференциалом Фреше функционала f, и пусть $\|La\|\leqslant M_1$, где M_1 — конечная константа. Кроме того, предположим, что L удовлетворяет условию Липшица: $\|La-Lb\|\leqslant M_2\|a-b\|$, где $a, b\subset S$.

Лемма 1. *Оператор $K(a)=La-(La; a)a$ удовлетворяет условию Липшица с постоянным $2(M_1+M_2)$.*

Доказательство легко вытекает из оценки нормы разности $K(a)-K(b)$, если ее представить в виде:

$$K(a)-K(b)=(La-Lb)+(b-a)(La; a)+b(Lb-La; b)+b(La; b-a).$$

Определение. Назовем a α-собственным элементом оператора L, если $\| K(a) \| \leqslant \alpha$.

Обозначим через a^ε произвольный элемент из $[c-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+\varepsilon]$. Около точки a^ε построим замкнутую сферу $S(a^\varepsilon, r)$ с центром a^ε и радиусом r.

Лемма 2. *Если* $\| K(a^\varepsilon) \| \geqslant \alpha > 0$, *то при* $r = \frac{\alpha}{4(M_1+M_2)}$ *для всех* $a \subset S(a^\varepsilon, r)$ *будем иметь* $\| K(a) \| \geqslant \alpha/2 > 0$.

Доказательство. Очевидно,

$$\| K(a^\varepsilon) - K(a) \| \geqslant \alpha - \| K(a) \|.$$

В силу неравенства

$$\| K(a^\varepsilon) - K(a) \| \leqslant 2(M_1+M_2) r$$

получаем доказательство леммы.

Пусть $ds = \| da \|$ обозначает дифференциал дуги ортогональной траектории, исходящей из точки a и направленной в сторону возрастания f.

Лемма 3. *Если* $\| K(a) \| \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0$, *то* $df(a, dh) \geqslant \frac{\alpha}{2} ds$, *где* $\| dh \| = ds$, dh — *элемент дуги ортогональной траектории.*

Доказательство получается из дифференциальных уравнений ортогональных траекторий:

$$\frac{da}{dt} = \frac{K(a)}{\| K(a) \|^2}.$$

В дальнейшем мы будем без оговорок предполагать, что

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{16(M_1+M_2)}. \tag{1}$$

Пусть Δs — длина ортогональной траектории с началом a^ε, идущей в сторону возрастания f. Пока $\Delta s = \frac{\alpha}{4(M_1+M_2)}$, ортогональная траектория находится внутри сферы $S(a^\varepsilon, r)$, где $\| K(a) \| \geqslant \alpha/2 > 0$, и, следовательно, в каждой точке дуги Δs можно ее продолжать до $\Delta s = r$.

Лемма 4. *Когда* $a^\varepsilon \subset (c-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+\varepsilon)$ *и* $\| K(a^\varepsilon) \| \geqslant \alpha > 0$, *то из* a^ε *можно провести ортогональную траекторию до поверхности уровня* $(f = c+\varepsilon)$.

Это вытекает из лемм 2 и 3.

Пусть $c = \sup\limits_{A \subset A]} C(A)$, $A_\varepsilon \subset [A]$ и $C(A_\varepsilon) \geqslant c - \varepsilon$.

Теорема 1. *Для любых* α *и* A_ε *существует элемент* $a_\varepsilon \subset A_\varepsilon \times [c-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+\varepsilon]$ *такой, что* a^ε *есть* α-*собственный элемент оператора* L, *т. е.*

$$\| K(a^\varepsilon) \| < \alpha.$$

Доказательство. Пусть теорема неверна. Это значит, что для всех $a^\varepsilon \subset A_\varepsilon$ имеем $\| K(a^\varepsilon) \| > \alpha$.

Сдвинем точку a^ε вдоль ортогональной траектории, исходящей из a^ε и направленной в сторону больших значений f, до точки a^ε_* поверхности уровня $(f = c+\varepsilon)$. Согласно лемме 4, точка a^ε_* существует. Повторим приведенное здесь рассуждение для каждой точки $a^\varepsilon \subset A_\varepsilon$, где $f < c+\varepsilon$. При этом точки A_ε, в которых $f \geqslant c+\varepsilon$, оставляем неподвижными. В результате построенной деформации множество A_ε переходит в множество $\overline{A}_\varepsilon \subset [A]$, на котором $f \geqslant c + \varepsilon$. Следовательно, и $\min\limits_{\overline{A}_\varepsilon} f \geqslant c + \varepsilon$. Но $c = \sup\limits_{[A]} \min\limits_{A} f \geqslant \min\limits_{\overline{A}_\varepsilon} f$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В дальнейшем будем предполагать, что в области $(f \geqslant c)$ для любого $c > 0$ существует такое $\lambda_c > 0$, что из $f \geqslant c$ следует $\| La \| \geqslant \lambda_c > 0$.

Рассмотрим последовательность α_n-собственных элементов $\{a^{\varepsilon_n}\} \subset (c - \varepsilon_n \leqslant f \leqslant c + \varepsilon_n)$ оператора L, где α_n и ε_n связаны равенством (1). Очевидно, при $\{\alpha_n\} \to 0$ и $\{\varepsilon_n\} \to 0$ и для почти всех n $\varepsilon_n < c/2$. Значения функционала f на почти всех элементах последовательности $\{a^{\varepsilon_n}\}$ удовлетворяют неравенству $f(a^{\varepsilon_n}) \geqslant c/2$ и, следовательно, согласно предположению, $\| La^{\varepsilon_n} \| \geqslant \lambda_c/2 > 0$.

Лемма 5. *Для последовательности* $\{a^{\varepsilon_n}\}$ *при* $\|La^{\varepsilon_n}\| \geqslant \lambda_{c/2} > 0$ *имеет место неравенство* $|(La^{\varepsilon_n}; a^{\varepsilon_n})| \geqslant \frac{\lambda_c}{2} - \alpha_n$.

Теорема 2. *Последовательность* $\{a^{\varepsilon_n}\}$ *компактна, и все ее предельные точки суть собственные элементы оператора* L *на поверхности уровня* $(f = c)$.

Обозначим $T_0 = (f = c) \times (\| K(a) \| = 0)$, где $(\| K(a) \| = 0)$ обозначает множество таких элементов a, для которых $\| K(a) \| = 0$.

Теорема 3. *Множество* T_0 *компактно.*

Пусть $T_\alpha = (c - \varepsilon \leqslant f \leqslant c + \varepsilon) \times (\| K(a) \| < \alpha)$, где $(\| K(a) \| < \alpha)$ обозначает множество элементов a, для которых $\| K(a) \| < \alpha$, и α и ε связаны равенством (1).

Лемма 6. *Для всякого* ε_1 *найдется число* $\alpha = \alpha(\varepsilon_1) > 0$ *такое, что* $T_\alpha \subset S\left(T_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, где $S\left(T_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ *обозначает* $\frac{\varepsilon_1}{2}$*-окрестность множества* T_0.

Пусть $[A_1], [A_2], \ldots, [A_k], \ldots$ замкнутые топологические классы, определенные на S_1^*, где $[A_k]$ обозначает класс всех замкнутых и компактных множеств категории $\geqslant k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, пусть $c_i = \sup\limits_{[A_i]} \min\limits_{A_i} f$. Очевидно, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant \ldots$ Обозначим через A_i^ε ε-максимальное множество в классе $[A_i]$.

Лемма 7. *Если* $\operatorname*{cat}\limits_{S_1^*} T_0 \leqslant l$, *то при достаточно малых* $\varepsilon_1 > 0$ и $\alpha > 0$ $\operatorname*{cat}\limits_{S_1^*} S\left(T_\alpha, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \leqslant l$.

С помощью этой леммы и теоремы 1 доказывается

Теорема 4. *Если значения* c_i *и* c_j $(j > i)$ *совпадают:* $c_i = c_j = c$, *то* $\operatorname*{cat}\limits_{S_1^*} T_0 = \operatorname*{cat}\limits_{S_1^*} [(f = c) \times (\| K(a) \| = 0)] \geqslant j - i + 1$.

Поступило
1 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Усп. матем. наук, в. 1 (1934). [2] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., **3**, 257 (1939). [3] В. И. Соболев, ДАН, **31**, № 8 (1941). [4] Э. С. Цитланадзе, ДАН, **51**, № 1 (1947), [5] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-differentialgleichungen, nebst Anwendungen, 1931, S. 141. [6] Э. С. Цитланадзе, ДАН, **53**, № 4 (1946). [7] Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, 1930.