

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 1 VIII 1947)

Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \quad (1)$$

конечная или бесконечная последовательность положительных чисел. В этой заметке мы дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция  $f(x)$ , определенная при  $x > a$ , разлагалась в абсолютно сходящийся ряд Дирихле

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x}.$$

Наше доказательство основывается на следующей теореме: всякая функция  $g(x)$  регулярно монотонная при  $x > a$ , стремящаяся к нулю вместе с  $1/x$ , удовлетворяет неравенству

$$g'^2(x) - g(x)g''(x) \leq 0. \quad (2)$$

Этот факт является частным случаем одного важного результата, установленного С. Н. Бернштейном (1). Неравенство (2) выражает, что квадратичная форма

$$g(x)\xi^2 + 2g'(x)\xi\eta + g''(x)\eta^2$$

не меняет знака, когда  $\xi$  и  $\eta$  изменяются.

Лемма 1. Пусть  $g(x) > 0$  регулярно монотонная функция при  $x > a$ , для которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k e^{\lambda x} g^{(k)}(x)}{\lambda^k} = B$$

существует и не зависит от  $k$ , причем  $\lambda$  — некоторое положительное число. Пусть  $f(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция при  $x > a$ , удовлетворяющая неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k g^{(k)}(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

В таком случае существует такое число  $A$ , что

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - Ae^{-\lambda x}] \right| \leq (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [g(x) - Be^{-\lambda x}].$$

Доказательство. Неравенство

$$|f^{(k)}(x)e^{\lambda x}| \leq (-1)^k g^{(k)}(x)e^{\lambda x} \quad (3)$$

показывает, что  $f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$  остается ограниченным при изменении  $x$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots \rightarrow \infty$  такая последовательность чисел, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_\nu) e^{\lambda x_\nu} = a_k$$

существует. С другой стороны, ввиду того, что функции  $g^{(k)}(x) \pm f^{(k)}(x)$  регулярно монотонны и стремятся к нулю вместе с  $1/x$ , заключаем, что

$$(-1)^k [\lambda^2 (g^{(k)}(x) \pm f^{(k)}(x)) + 2\lambda (g^{(k+1)}(x) \pm f^{(k+1)}(x)) + g^{(k+2)}(x) \pm f^{(k+2)}(x)] \geq 0,$$

и, следовательно,

$$|\lambda^2 f^{(k)}(x) + 2\lambda f^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)| \leq (-1)^k [\lambda^2 g^{(k)}(x) + 2\lambda g^{(k+1)}(x) + g^{(k+2)}(x)]. \quad (4)$$

Умножая на  $e^{\lambda x}$  и применяя результат к  $x = x_\nu$ , находим

$$|e^{\lambda x_\nu} [\lambda^2 f^{(k)}(x_\nu) + 2\lambda f^{(k+1)}(x_\nu) + f^{(k+2)}(x_\nu)]| \leq (-1)^k e^{\lambda x_\nu} [\lambda^2 g^{(k)}(x_\nu) + 2\lambda g^{(k+1)}(x_\nu) + g^{(k+2)}(x_\nu)],$$

откуда заключаем, при неограниченном возрастании  $\nu$ , что

$$\lambda^2 a_k + 2\lambda a_{k+1} + a_{k+2} = 0.$$

Из этого уравнения находим без труда, что

$$(-1)^k a_k = A\lambda^k + A'\lambda^k.$$

Неравенство (3) дает

$$|A + A'k| \leq B \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

и, следовательно,  $A' = 0$ , т. е.  $a_k = (-1)^k A\lambda^k$ .

С другой стороны, неравенство (4) дает

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} f^{(k)}(x) \right| \leq (-1)^k \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} g^{(k)}(x),$$

откуда, интегрируя от  $x$  до  $x_\nu$ , причем  $x_\nu > x$ , находим

$$\left| \frac{d}{dx} e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - [\lambda e^{\lambda x_\nu} f^{(k)}(x_\nu) + e^{\lambda x_\nu} f^{(k+1)}(x_\nu)] \right| \leq (-1)^{k+1} \left[ \frac{d}{dx} e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - (\lambda e^{\lambda x_\nu} g^{(k)}(x_\nu) + e^{\lambda x_\nu} g^{(k+1)}(x_\nu)) \right].$$

Пусть теперь  $\nu$  возрастает неограниченно. После предельного перехода находим:

$$\left| \frac{d}{dx} e^{\lambda x} f^{(k)}(x) \right| \leq (-1)^{k+1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} g^{(k)}(x).$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$|e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - e^{\lambda x_\nu} f^{(k)}(x_\nu)| \leq (-1)^k [e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - e^{\lambda x_\nu} g^{(k)}(x_\nu)],$$

и, следовательно,

$$|e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - a_k| \leq (-1)^k [e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - B\lambda^k],$$

или

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - Ae^{-\lambda x}] \right| \leq (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [g(x) - Be^{-\lambda x}].$$

*Теорема. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция  $f(x)$  разлагалась при  $x > a$  в абсолютно сходящийся ряд Дирихле, соответствующий последовательности (1), необходимо и достаточно, чтобы существовала для  $x > a$  функция  $g(x)$ , разложимая в ряд Дирихле того же типа с неотрицательными коэффициентами*

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x}$$

так, что

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k g^{(k)}(x) \quad (5)$$

для  $k=0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Мы покажем, что оно и достаточно. Очевидно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k g^{(k)}(x) e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^k} = B_1$$

и, следовательно, на основании леммы, существует такое число  $A_1$ , что

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - A_1 e^{\lambda_1 x}] \right| \leq (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [g(x) - B_1 e^{-\lambda_1 x}] = \sum_{\nu=2}^{\infty} B_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x}.$$

Но, очевидно, нашу лемму можно применить еще раз. Продолжая таким образом, индуктивно устанавливаем существование чисел

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

для которых

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \left[ f(x) - \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x} \right] \right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} B_{\nu} \lambda_{\nu}^k e^{-\lambda_{\nu} x}.$$

Пусть теперь  $n$  неограниченно возрастает. Выбирая  $k=0$ , заключаем, что ряд  $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x}$  абсолютно сходится при  $x > a$  и что сумма его равна  $f(x)$ .

Рассуждения сохраняют свою силу и в случае, когда последовательность (1) конечна. Тогда  $f(x)$  обращается в экспоненциальный полином

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x},$$

где  $m$  — число членов последовательности (1). В специальном случае, когда последовательность (1) содержит только один член, функция  $f(x)$  обращается в показательную функцию  $Ae^{-\lambda x}$ . Этот результат мы установили недавно другим путем (2).

Наша теорема сохраняет силу и в том случае, если предположить,

что функция  $f(x)$  удовлетворяет неравенствам (5) только для бесчисленного множества значений  $k$  (а не для всех целых неотрицательных значений)  $k=k_1, k_2, \dots$ , но что существует такая последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots \rightarrow 0$ , что  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\xi_\nu) = 0$ .

Мы докажем при этих предположениях, что неравенства (5) выполнены при всех целых неотрицательных значениях  $k$ . Это вытекает из следующей элементарной леммы.

**Лемма 2.** *Предположим, что функция  $\varphi(x)$  и ее  $n$  первых производных  $\varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$  существуют при  $x > a$  и  $\varphi^{(n)}(x)$  непрерывна и не меняет знака.*

*Если существует последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(\xi_\nu) = 0$ , то выражение  $(-1)^k \varphi^{(k)}(x)$  сохраняет постоянный знак при  $0 \leq k \leq n$ , когда  $x$  и  $k$  изменяются.*

**Доказательство.** Можно найти такие последовательности  $x_{k1}, x_{k2}, \dots \rightarrow 0$ , что  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x_{k\nu}) = 0$ . Для этого достаточно выбрать частичную последовательность  $x_{01}, x_{02}, \dots$  из (6), для которой  $x_{0\nu} - x_{0,\nu-1} \geq 1$ , и подобрать последовательности  $x_{k1}, x_{k2}, \dots$  так, чтобы

$$\varphi^{(k-1)}(x_{k-1, 2\nu}) - \varphi^{(k-1)}(x_{k-1, 2\nu-1}) = (x_{k-1, 2\nu} - x_{k-1, 2\nu-1}) \varphi^{(k)}(x_{k, \nu}).$$

С другой стороны,

$$\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_{k-1, \nu}) = - \int_x^{x_{k-1, \nu}} \varphi^{(k)}(t) dt.$$

Если  $\varphi^{(k)}(t)$  не меняет знака, то можем, очевидно, писать

$$\varphi^{(k-1)}(x) = - \int_x^\infty \varphi^{(k)}(t) dt$$

и, следовательно,  $\varphi^{(k-1)}(x)$  также не меняет знака, когда  $x$  изменяется.

Чтобы установить, что неравенства (5) выполнены при всех целых неотрицательных значениях  $k$ , если они выполнены при  $k=k_1, k_2, \dots$  и если  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\xi_\nu) = 0$ , достаточно применить лемму 2 к сумме и разности  $g(x) \pm f(x)$ , так как  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} g(\xi_\nu) = 0$ , что видно из

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{-\lambda_\nu x},$$

где числа  $\lambda_\nu$  положительны. Можно прийти к тому же результату, используя одну теорему Н. Обрешкова (3) вместо леммы 2.

Поступило  
3 VII 1947

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> S. Bernstein, Atti Congr. Bologna, 2, 267 (1928). <sup>2</sup> J. Tagamlitzki, C. R., 223, 940 (1946). <sup>3</sup> N. Obreshkoff, C. R., 223, 397 (1946).