Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 9

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О СПЕКТРЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 III 1947)

Мы будем рассматривать для простоты ограниченные на всей оси непрерывные функции, не оговаривая это каждый раз. Все результаты настоящей заметки без затруднения переносятся на случай функций, растущих на бесконечности как некоторая степень x.

Положим

$$L_F(z)=\int_0^{\infty} e^{izt}F(t)\,dt,\quad \text{если } \operatorname{Im} z<0;$$

$$L_F(z)=\int_0^{-\infty} e^{izt}F(t)\,dt,\quad \text{если } \operatorname{Im} z>0.$$

Мы будем говорить, что $F(x)$ не имеет спектра в некотором интервале, если ее второе обобщенное преобразование Фурье [1] есть линейная функция в этом интервале.

Легко получить (например, опираясь на результаты [5]) следующие предложения:

1) Если $g(x)$ такая абсолютно интегрируемая функция, что ее преобразование Фурье равно единице на открытом множестве, содержащем спектр F, то $\int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,g(t)\,dt=F(x)$.

2) Если $F(x)$—функция экспоненциального типа A, то она не имеет спектра вне интервала $(-A, A)$.

3) Если $g(x)$ такая абсолютно интегрируемая функция, что ее преобразование Фурье равно единице в интервале (λ_1, λ_2), то $F(x)-\int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,g(t)\,dt$ не имеет спектра в этом интервале.

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ — функция экспоненциального типа A*, ограниченная на действительной оси. Положим*

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{если } -A\leqslant\lambda\leqslant A;\\ 0, & \text{если } \lambda\leqslant -A-\delta=-A_1;\\ 0, & \text{если } \lambda\geqslant A+\delta=A_1,\end{cases}$$

и пусть $\varphi(\lambda)$ непрерывна на всей оси и имеет две непрерывные производные. Тогда

* $|f(z)|\leqslant ke^{A|z|}$.

$$L_F(z)=\frac{2}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,dt\int\limits_{-A_1}^{A_1}\frac{e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\,d\lambda. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $F(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}t^k$. Тогда при $|z|>A$ (([2]), стр. 64)

$$L_F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{(iz)^{k+1}}. \tag{2}$$

Из 1) и 2) следует, что $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x-t)\,F(t)\,dt$, где $g(x)$ — функция, преобразование Фурье которой есть $\varphi(\lambda)$.

Из свойств функции φ следует, что

$$F^{(k)}(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g^{(k)}(t)\,F(-t)\,dt. \tag{3}$$

Подстановка (3) в (2) дает:

$$L_F(z)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(t)}{(iz)^{k+1}}\right]F(-t)\,dt. \tag{4}$$

Но

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A_1}^{A_1}e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(t)}{(iz)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-A_1}^{A_1}\frac{e^{i\lambda t}\lambda^k}{z^{k+1}}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-A_1}^{A_1}\frac{e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-A_1}^{A_1}\frac{e^{i\lambda t}(\lambda/z)^{n+1}\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\,d\lambda. \tag{5}$$

Подстановка (5) и (4) после предельного перехода с помощью двукратного интегрирования по частям дает (1).

Обозначим через $\Phi_F(\lambda)$ второе преобразование Фурье функции F.

Лемма 2. *При предположениях леммы* 1 *справедлива формула*

$$L_F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_F(\lambda)\frac{d\lambda}{(z-\lambda)^3}. \tag{6}$$

Из (1) получим с помощью интегрирования по частям ($\varphi(\pm A_1)=\varphi'(\pm A_1)=0$)

$$L_F(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-A_1}^{A_1}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{-i\lambda t}-1+i\lambda t}{(it)^2}F(t)\,dt+\int\limits_{1}^{n}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-n}^{-1}\frac{e^{-i\lambda t}}{(it)^2}F(t)\,dt\right]\left(\frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\right)^{n}d\lambda. \tag{7}$$

Переходя в (7) к пределу, получим:

$$L_F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-A_1}^{A_1}\Phi_F(\lambda)\left(\frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\right)'' d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-A}^{A}\Phi_F(\lambda)\frac{d\lambda}{(z-\lambda)^3}+\int\limits_{A}^{A_1}+\int\limits_{-A_1}^{A}\Phi_F(\lambda)\left(\frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda}\right)'' d\lambda. \qquad (8)$$

Но так как $F(x)$ не имеет спектра вне $(-A, A)$, то при $\lambda>A$ $\Phi_F(\lambda)=c_1\lambda+c_2$ и при $\lambda<-A$ $\Phi_F)\lambda)=d_1\lambda+d_2$. Используя это для вычисления двух последних интегралов в правой части (8), будем иметь:

$$L_F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-A}^{A}\Phi_F(\lambda)\frac{d\lambda}{(z-\lambda)^3}+\frac{c_1A+c_2}{(z-A)^2}+\frac{c_1}{z-A}+$$

$$+\frac{d_1A-d_2}{(z+A)^2}-\frac{d_1}{z+A}. \qquad (9)$$

Переходя в (9) к пределу при $A\to\infty$, получим (6).

Теорема 1. *Если $F(x)$ — любая непрерывная ограниченная на всей оси функция, то для нее имеет место представление* (6).

Доказательство. Полагая $F_n(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x-t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{nt^2}\,dt$, мы получим последовательность функций F_n экспоненциального типа, равномерно сходящихся в каждом конечном интервале к функции F и равномерно ограниченных. Для них представление (6) имеет место. С другой стороны, очевидно $\lim\limits_{n\to\infty}L_{F_n}(z)=L_F(z)$. В правой части (6) тоже легко перейти к пределу, так как $\int\limits_{1}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{F_n(x)}{x^2}\,e^{-i\lambda x}\,dx$ стремится в среднем квадратичном к соответствующему интегралу для F.

Мы будем говорить, что $F(x)$ имеет аналитический спектр в интервале $\Delta=(\lambda_1, \lambda_2)$, если для любого интервала $\Delta_\delta=(\lambda_1+\delta, \lambda_2-\delta)$, содержащегося внутри (λ_1, λ_2), $F(x)$ может быть представлена в виде суммы $F=F_{1,\delta}+F_{2,\delta}$, где $F_{1,\delta}$ не имеет спектра внутри Δ_δ, а $F_{2,\delta}(x)=$ $=\int\limits_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\psi(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$, где $\psi(\lambda)$—аналитическая функция внутри интервала (λ_1, λ_2) ($\psi(\lambda)$ зависит, очевидно, только от Δ).

Теорема 2. *Для того чтобы $F(x)$ имела аналитический спектр в интервале (λ_1, λ_2), необходимо и достаточно, чтобы $L_F(z)$ было аналитически продолжимо из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот через интервал (x_1, x_2) $(x_1=\lambda_1,\ x_2=\lambda_2)$ на действительной оси. Для того чтобы $F(x)$ не имела спектра в интервале (λ_1, λ_2), необходимо и достаточно, чтобы $L_F(z)$ была регулярной в области $\Omega_{\lambda_1,\lambda_2}$, составленной из обеих полуплоскостей* $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ *и интервала* (λ_1, λ_2).

Доказательство необходимости немедленно следует из (6).

Докажем достаточность. Пусть $g(x)$—функция, преобразование Фурье которой $\varphi(\lambda)$ равно:

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}1, \text{ если } \lambda_1-1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2+1,\\ 0, \text{ если } \lambda<\lambda_1-2,\ \lambda>\lambda_2+2,\end{cases}$$

$\varphi(\lambda)$ линейна в остальных интервалах.

Положим $F_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,g(t)\,dt$ и $F_2 = F - F_1$. Тогда $F = F_1 + F_2$; F_2 не имеет спектра в интервале $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1)$, а F_1 — функция экспоненциального типа. $L_F = L_{F_1} + L_{F_2}$, и L_{F_2} регулярна в $\Omega_{\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1}$. Поэтому оставшуюся часть теоремы достаточно доказать для функции экспоненциального типа.

Пусть F такая функция типа A.

Отбрасывая регулярную часть в правой части (9), предположим, что $\widetilde{L}_F(z) = \int\limits_{-A}^{A} \Phi_F(\lambda) \frac{d\lambda}{(z-\lambda)^3}$ продолжима через отрезок (λ_1, λ_2) в обе полуплоскости. Тогда $\widetilde{L}_F(z)$ регулярна в области Ω, находящейся над отрезками $(-\infty, \lambda_1)$, (λ_2, ∞) и некоторой дугой с концами в точках $z_1 = \lambda_1$, $z_2 = \lambda_2$, расположенной внутри нижней полуплоскости и в области Ω', являющейся зеркальным отображением области Ω.

Если $\operatorname{Im} a_1 > 0$, то

$$\int\limits_{a_1}^{z} dz \int\limits_{a_1}^{z} \widetilde{L}_F(z)\,dz = \frac{1}{2} \int\limits_{-A}^{A} \frac{\Phi_F(\lambda)\,d\lambda}{z-\lambda} + c_1 z + c_2, \tag{10}$$

где пути интегрирования лежат в области Ω.

Так как левая часть (10) регулярна в Ω, то $J(z) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{\Phi_F(\lambda)}{z-\lambda}\,d\lambda$ регулярна в Ω. Точно так же $J(z)$ регулярна в Ω'. Формула обращения Стильтьеса ([3]) дает, что $\Phi_F(\lambda)$ есть аналитическая функция $\psi(\lambda)$ в интервале (λ_1, λ_2) и

$$\widetilde{L}_F = \int\limits_{\lambda_2-\delta}^{A} \quad \int\limits_{-A}^{\lambda_1+\delta} \frac{\Phi_F(\lambda)\,d\lambda}{(z-\lambda)^3} + \int\limits_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} \frac{\psi(\lambda)}{(z-\lambda)^3}\,d\lambda. \tag{11}$$

Предположим дополнительно, что $\widetilde{L}_F$ регулярна в области $\Omega_{\lambda_1, \lambda_2}$. Тогда интеграция третьего интеграла (11) дважды по частям дает, с помощью формулы обращения Стильтьеса, что $\psi''(\lambda) = 0$, т. е. при этом условии $F(x)$ не имеет спектра в интервале (λ_1, λ_2).

Будем снова считать, что $L_F(z)$ продолжима через отрезок (λ_1, λ_2) в обе полуплоскости.

Положим $F_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} e^{i\lambda t}\,\psi''(\lambda)\,d\lambda$. Из (11) следует, что $\widetilde{L}_{F-F_1}(z) = \widetilde{L}_F(z) - \widetilde{L}_{F_1}(z)$ регулярна в области $\Omega_{\lambda_1-\delta, \lambda_2+\delta}$, откуда, по предыдущему, $F - F_1 = F_2$ не имеет спектра в интервале $(\lambda_1 + \delta, \lambda_2 - \delta)$, и, таким образом, разложение $F = F_1 + F_2$ доказывает оставшуюся часть теоремы 2.

Заметим, что для случая функций экспоненциального типа теорема 2 дает все особые точки преобразования Лапласа.

Теорема 2 этой заметки тесно связана с некоторыми результатами T. Carleman'a ([4]).

Поступило
20 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932. [2] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1932. [3] H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, N.-Y., 1932. [4] T. Carleman, L'intégrale de Fourier, Upsala, 1944. [5] А. Повзнер, ДАН, 57, № 8 (1947).