Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 9

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

О ПОРЯДКЕ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1947)

В 1903 г. Фубини получил важную теорему о том, что римановы пространства n измерений не имеют полных групп движений порядка $\frac{n(n+1)}{2}-1$. Имеет ли место в аффинно-связных пространствах положение, соответствующее теореме Фубини в римановых пространствах: существуют ли непрерывные группы Ли порядка n^2+n-1, являющиеся полными группами движений? Этот вопрос до сих пор не решен, и верхней границей порядка полных групп движений было $r=n^2+n$.

Пусть в многообразии $x^1, x^2, \ldots, x^n$, вещественном или комплексном, определено аффинно-связное пространство с объектом перенесения $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, симметрическим по нижним индексам β, γ; мы будем говорить, что оно допускает движения от инфинитезимального оператора

$$XF=v^\sigma p_\sigma, \tag{1}$$

где σ — индекс суммирования от 1 до n. Кроме того,

$$p_\sigma=\frac{\partial F}{\partial x^\sigma}, \quad v^\sigma=v^\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

если

$$D_L\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=v^\alpha_{,\beta,\gamma}-R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}v^\sigma=0; \tag{2}$$

$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны; символ, означает ковариантное дифференцирование со связностью $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$; D_L — знак лиевого дифференцирования в направлении поля v^σ, определяющего бесконечно малые преобразования. Совокупность r линейно независимых операторов (1), подчиненных условию (2) и образующих группу Ли, будем называть полной группой движения для заданного пространства $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, если она наибольшего порядка.

Представим уравнения (2) в форме

$$u^\alpha_{\beta,\gamma}-R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}v^\sigma=0, \tag{3}$$

$$v^\alpha_{,\beta}=u^\alpha_\beta. \tag{4}$$

Уравнения (4) на основании тождества Риччи и уравнений (3) являются вполне интегрируемыми. Что касается условий интегрируемости уравнений (3), то расписывая $u^\alpha_{\beta,[\gamma,\varepsilon]}=0$, получаем

$$v^{\sigma} R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,\,\sigma} + u_{\beta} R^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon} + u^{\sigma}_{\gamma} R^{\alpha}_{\beta\sigma\varepsilon} + u^{\sigma}_{\varepsilon} R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma} - u^{\alpha}_{\sigma} R^{\sigma}_{\beta\gamma\varepsilon} = 0,$$

или, пользуясь дифференцированием Ли:

$$1)\ D_L R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 0.$$

Все другие серии условий интегрируемости, в силу коммутативности операций ковариантного и лиевого дифференцирования вдоль траекторий движения, будут вида

$$2)\ D_L R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,\,\mu_1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$N)\ D_L R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_{N-1}} = 0,$$

$$N+1)\ D_L R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_{N-1},\,\mu_N} = 0\ .$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство аффинной связности имело r-членную полную группу движений является существование такого целого положительного числа N, для которого ранги первых N и $N+1$ серий условий интегрируемости относительно v^{σ} и u^{σ}_{τ} равны n^2+n-r.

Рассмотрим матрицу

$$\left\| T^1_1\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, T^1_2\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, \dots, T^1_n\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, \dots, T^n_n\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} \right\|, \qquad (5)$$

которая является укороченной матрицей системы первой серии условий интегрируемости относительно n^2 неизвестных функций $v^{\sigma}_{,\tau} = u^{\sigma}_{\tau}$.

Элементы этой матрицы в расписанном виде имеют вид:

$$T^{\sigma}_{\tau}\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} = \delta^{\sigma}_{\beta} R^{\alpha}_{\tau\gamma\delta} + \delta^{\sigma}_{\gamma} R^{\alpha}_{\beta\tau\delta} + \delta^{\sigma}_{\delta} R^{\alpha}_{\beta\gamma\tau} - \delta^{\alpha}_{\tau} R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}. \qquad (6)$$

Имеют место следующие предложения алгебраического характера:

Лемма 1. *Для любой составляющей*

$$R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \qquad (\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

можно отнести минор n-го порядка матрицы (5), *величина которого равна степени этой составляющей.*

Достаточно рассмотреть минор из коэффициентов при неизвестных

$$u^{\varepsilon_1}_{\alpha_1}, u^{\varepsilon_2}_{\alpha_1}, \dots, u^{\varepsilon_n}_{\alpha_1} \qquad (\varepsilon_i \neq \varepsilon_j)$$

в уравнениях

$$\binom{\varepsilon_i}{\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 2. *Для любой составляющей вида $R^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}$ можно отнести такой минор n-го порядка матрицы* (5), *величина которого с точностью до постоянного множителя будет степенью этой составляющей.*

Для доказательства достаточно вычислить определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных

$$u^{\alpha_3}_{\alpha_1}, u^{\alpha_3}_{\alpha_2}, \dots, u^{\alpha_3}_{\alpha_n} \qquad (\alpha_i \neq \alpha_j)$$

в уравнениях

$$\binom{\alpha_2}{\alpha_j\,\alpha_2\,\alpha_3}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

При условиях лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Если ранг матрицы* (5) *меньше* n, *то*

$$R^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}+R^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}. \tag{7}$$

Справедливость этой леммы следует из рассмотрения уравнений

$$\begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_3\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_n\alpha_3\end{pmatrix}$$

и неизвестных

$$u^{\alpha_2}_{\alpha_1}, u^{\alpha_3}_{\alpha_2}, u^{\alpha_3}_{\alpha_3}, u^{\alpha_2}_{\alpha_4}, \ldots, u^{\alpha_2}_{\alpha_n}.$$

Из доказанного вытекает

Лемма 4. *Если ранг матрицы* (5) *меньше* n, *то соотношения* (7) *остаются в силе, если заменить верхний и нижний индексы на любой другой.*

Для доказательства следует рассмотреть минор, составленный из столбцов

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_4\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

и строчек

$$\begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_3\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_3 & \\ \alpha_3\alpha_n\alpha_3\end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Любому элементу вида* $R^{\alpha_1}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}$ *можно отнести минор* n-*го порядка исходной матрицы, который выражается степенью этого элемента.*

Искомым минором будет минор, отвечающий строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2 & \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \\ \alpha_4\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \\ \alpha_n\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}$$

и столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_4\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

в силу леммы 4.

Леммы 1, 2 и 5 и тождество Риччи над составляющими тензора кривизны дают возможность получить общий результат, решающий вопрос о возмножных порядках групп движений аффинно-связных пространств.

Теорема. *Порядок полных групп движений* n-*мерных пространств аффинной связности, отличных от аффинно-евклидовых пространств, меньше или равен* n^2, *если* $n \geqslant 3$.

Доказательство. Пусть порядок полной группы движений будет $r = n^2 + n - s + 1$, где $1 < s \leqslant n$.

Тогда все определители порядка s, составленные из N серий условий интегрируемости, будут обращаться в нули. Следовательно, обращаются в нули такие определители и первой серии, в частности, этим свойством обладает соответствующая ей укороченная система, матрица которой (5).

Положим, что не ограничит общности доказательства, $s = n$.

Леммы 1, 2 и 5 дают:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0,$$

если индекс α отличен от индексов β, γ, δ или совпадает с одним из индексов γ, δ (остальная пара индексов независима).

Тождество Риччи дает обращение в нуль составляющих вида $R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}$, где β, γ отлично от α.

Остается рассмотреть составляющие вида $R^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}$.

В этом случае система уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_3 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\,\alpha_n\,\alpha_3 \end{pmatrix}$$

с неизвестными

$$u^{\alpha_2}_{\alpha_1}, u^{\alpha_3}_{\alpha_1}, u^{\alpha_2}_{\alpha_3}, u^{\alpha_4}_{\alpha_2}, \ldots, u^{\alpha_n}_{\alpha_3}$$

дает определитель системы, являющийся степенью составляющей $R^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}$. Таким образом, пространством аффинной связности, для которого полная группа движений имеет порядок $r \geqslant n^2+1$, может быть только аффинно-евклидово пространство.

Установленная граница порядка групп движений точная, т. е. уменьшить ее невозможно. Путем изучения $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, соответствующих оператору $X_j^{\,i} F = x^i p_j$, мы приходим к группе движений

$$p_i \quad (i=1,\ 2, \ldots, n),$$
$$x^i p_j \quad (i=1,\ 2, \ldots, n;\ j=1,\ 2, \ldots, n-1)$$

порядка n^2, для которой пространство аффинной связности

$$\Gamma^1_{1\,n} = \Gamma^2_{2\,n} = \Gamma^3_{3\,n} = \ldots = \Gamma^{n-1}_{n-1\,n} = {}^1/_2\, \Gamma^n_{n\,n} = a = \mathrm{const}, \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$$

имеет отличный от нуля тензор кривизны:

$$R^1_{n\,1\,n} = R^2_{n\,2\,n} = \ldots = R^{n-1}_{n\,n-1\,n} = a^2, \text{ другие } R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0.$$

Если $n=2$, то предыдущий метод не дает возможности сказать что-либо определенное о существовании пятичленных полных групп движений. Проводя полную классификацию двумерных аффинно-связных пространств (многообразия комплексные) по всевозможным группам движений, мы попутно получаем заключение о справедливости указанной теоремы и в этом случае.

Поступило
10 II 1947