Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 1

ТЕПЛОТЕХНИКА

И. А. ЧАРНЫЙ *

ОБ ОДНОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ ЗАДАЧИ ФОРХГЕЙМЕРА

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 30 VIII 1944)

1. Требуется определить теплопотерю с единицы длины трубы, зарытой в грунт, при конечном значении коэффициента теплопередачи k от поверхности грунта в воздух. Форхгеймером решена задача для случая, когда задан не коэффициент теплопередачи, а температура поверхности грунта, принимаемая за нуль.

Температуру T_0 поверхности грунта, соприкасающейся с трубой, будем считать известной. Температуру воздуха примем за нуль. Коэффициент теплопроводности грунта обозначим λ. Распределение температуры установившееся. Глубина и радиус трубы H_0, r (рис. 1).

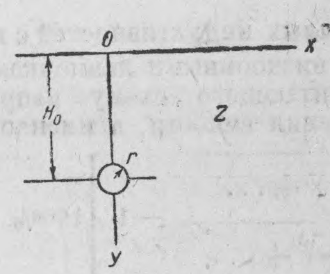

Рис. 1

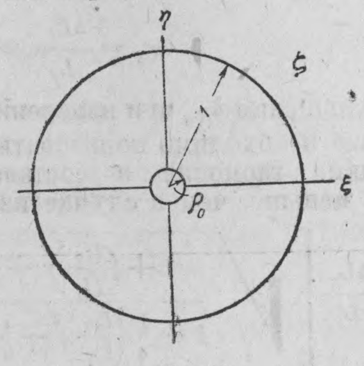

Рис. 2

При этих условиях задача сводится к нахождению решения уравнения $\Delta T = 0$ при граничных условиях:

$$\left.\begin{array}{l}\text{на поверхности трубы: } T = T_0;\\ \text{при } y = 0 \;\; kT = \lambda \partial T/\partial y.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

2. Введем функцию

$$W(z) = \Phi + i\Psi, \qquad (2)$$

где

$$\Phi = \lambda T, \qquad (3)$$

Ψ — функция тока.

Пользуясь условиями Коши — Римана

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

---

* В статье того же автора, ДАН, XLII, № 4 (1944) ошибочно указаны инициалы М. А. Чарный. Должно быть И. А. Чарный.

представим граничные условия (1) в следующем виде:

$$\text{при } y=0 \quad \frac{k}{\lambda}\mathrm{R}(W)=-\mathrm{I}\left(\frac{dW}{dz}\right); \tag{4}$$

на поверхности трубы:

$$\mathrm{R}(W)=\lambda T_0=\Phi_0. \tag{5}$$

Таким образом, задача сводится к определению функции комплексного переменного $W(z)$, удовлетворяющей (4), (5) и обращающейся в нуль на бесконечности.

3. Отобразим при посредстве функции

$$\zeta=\frac{z-iH}{z+iH} \tag{6}$$

область температур в грунте на плоскости z в круговое кольцо плоскости ζ с радиусами $\rho_0<1$, $\rho=1$ так, чтобы ось ox перешла в окружность $\rho=1$, а сечение трубы — в круг $\rho=\rho_0$. Постоянные H и ρ_0 определим ниже. На плоскости ζ (4) и (5) будут иметь вид

$$|\zeta|=1: \quad \frac{k}{\lambda}\mathrm{R}(W)=-\mathrm{I}\left(\frac{dW}{d\zeta}\Big/\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\mathrm{I}\left[\frac{(1-\zeta)^2}{2iH}\,\frac{dW}{d\zeta}\right]; \tag{4.1}$$

$$|\zeta|=\rho_0: \quad \mathrm{R}(W)=\Phi_0. \tag{5.1}$$

W внутри кольца разлагается в ряд

$$W=A\ln\zeta+\sum_{-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n, \tag{7}$$

где

$$\zeta=\rho e^{i\theta}, \qquad a_n=\alpha_n+i\beta_n. \tag{7.1}$$

Из (7) получаем:

$$|\zeta|=\rho_0: \quad \mathrm{R}(W)=A\ln\rho_0+\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\rho_0^{\,n}+\alpha_{-n}\rho_0^{-n})\cos n\theta - (\beta_n\rho_0^{\,n}-\beta_{-n}\rho_0^{-n})\sin n\theta. \tag{8}$$

$$|\zeta|=1: \quad -\mathrm{I}\left[\frac{(1-\zeta)^2}{2iH}\,\frac{dW}{d\zeta}\right]=\frac{1}{2H}\Big\{2A(\cos\theta-1)+ \sum_{n=1}^{\infty}n(\alpha_n-\alpha_{-n})[\cos(n-1)\theta-2\cos n\theta+\cos(n+1)\theta]- \sum_{n-1}^{\infty}n(\beta_n+\beta_{-n})[\sin(n-1)\theta-2\sin n\theta+\sin(n+1)\theta]\Big\}. \tag{9}$$

Из (6), (7) и условия на бесконечности получаем

$$z=\infty, \qquad \zeta=1, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}a_n=0. \tag{10}$$

Сравнивая коэффициенты, согласно (4.1) и (5.1) получим.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_0+A\ln\rho_0=\Phi_0; \qquad \frac{1}{2H}(-2A+\alpha_1-\alpha_{-1})=\frac{k\alpha_0}{\lambda};\\ &\alpha_n\rho_0^{\,n}+\alpha_{-n}\rho_0^{-n}=0; \qquad \beta_n=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{1}{2H}[2A+2(\alpha_2-\alpha_{-2})-2(\alpha_1-\alpha_{-1})]=\frac{k}{\lambda}(\alpha_1+\alpha_{-1}), \tag{12}$$

. . . .

$$\frac{1}{2H}[(n+1)(\alpha_{n+1}-\alpha_{-(n+1)})-2n(\alpha_n-\alpha_{-n})+(n-1)(\alpha_{n-1}-\alpha_{-(n-1)})]=$$
$$=\frac{k}{\lambda}(\alpha_n+\alpha_{-n}). \tag{13}$$

Из (10):

$$\alpha_0+\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n=0. \tag{14}$$

Определение коэффициентов α_n и A производится следующим образом: из (11) и (12) выражаем через A коэффициенты α_0, α_1, α_{-1}, α_2, α_{-2}:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_0=\Phi_0-A\ln\rho_0;\quad \alpha_1=2\frac{\beta\Phi_0+(1-\beta\ln\rho_0)A}{1+\rho_0^2};\quad \alpha_{-1}=-\alpha_1\rho_0^2;\\ &\alpha_{-2}=-\alpha_2\rho_0^4;\quad \beta=\frac{kH}{\lambda};\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\frac{2\beta\alpha_0+[(2\beta+1)-(2\beta-1)\rho_0^2]\alpha_1}{1+\rho_0^4}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Дальнейшие коэффициенты вычисляются по рекурентной формуле, получаемой из (13):

$$\alpha_{n+1}=\frac{2[(\beta+n)\alpha_n+(\beta-n)\alpha_{-n}]-(n-1)(\alpha_{n-1}-\alpha_{-(n-1)})}{(n+1)(1+\rho_0^{2(n+1)})}. \tag{16}$$

Таким образом все коэффициенты α_n выражаются через A линейным образом. Подставляя значения α_n в (14), мы получим уравнение для определения A. Потеря тепла с единицы длины трубы определяется формулой

$$Q=-2\pi A. \tag{17}$$

Связь между глубиной H_0 и радиусом r (рис. 1) с H и ρ_0 легко устанавливается из (6). После вычислений получим:

$$H=H_0\frac{1-\rho_0^2}{1+\rho_0^2}, \tag{18}$$

$$\rho_0=\frac{H_0}{r}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{H_0^2}}\right). \tag{19}$$

Если r/H_0 мало, что обычно имеет место, то

$$\rho_0\approx r/2H_0,\qquad H_0\approx H. \tag{19.1}$$

Переменные ρ и θ связаны с x, y соотношениями

$$\rho^2=\frac{x^2+(y-H)^2}{x^2+(y+H)^2};\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y-H}{x}-\operatorname{arctg}\frac{y+H}{x}. \tag{20}$$

4. Представление решения в виде бесконечного ряда (7) требует для определения коэффициентов большой вычислительной работы и дальнейшего исследования характера сходимости. Поэтому мы поступим следующим образом: удержим в (7) только один член разложения и посмотрим, насколько исказится при этом граничное условие (4).

Из (9) и (5) получаем при этом вместо (4):

$$|\zeta|=1:\qquad \frac{k}{\lambda}\mathrm{R}(W)+\mathrm{I}\left[\frac{(1-\zeta)^2}{2iH}\frac{dW}{d\zeta}\right]=-\frac{\alpha_1-\alpha_1}{2H}\cos 2\theta. \tag{21}$$

Если считать $\alpha_n=\alpha_{-n}=0$ для $n>1$, то для определения оставшихся коэффициентов будем иметь согласно (11) и (14) уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 + A \ln \rho_0 = \Phi_0; \qquad \frac{1}{2H}(-2A + \alpha_1 - \alpha_{-1}) = \frac{k\alpha_0}{\gamma}; \\ &\alpha_1\rho_0 + \frac{\alpha_{-1}}{\rho_0} = 0; \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{-1} = 0; \quad \beta_1 = \beta_{-1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Решая (22), получаем

$$A = \Phi_0 \frac{1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0^2)} \dfrac{\lambda}{kH}}{\left[1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0)^2} \dfrac{\lambda}{kH}\right] \ln \rho_0 - \dfrac{\lambda}{kH}}. \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= -\Phi_0 \frac{\lambda/kH}{\left[1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0^2)} \dfrac{\lambda}{kH}\right] \ln \rho_0 - \dfrac{\lambda}{kH}}; \\ \alpha_1 &= \Phi_0 \frac{\lambda/kH}{\left\{\left[1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0^2)} \dfrac{\lambda}{kH}\right] \ln \rho_0 - \dfrac{\lambda}{kH}\right\}(1-\rho_0^2)}; \\ \alpha_{-1} &= -\Phi_0 \frac{\dfrac{\lambda}{kH}\rho_0^2}{\left\{\left[1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0^2)} \dfrac{\lambda}{kH}\right] \ln \rho_0 - \dfrac{\lambda}{kH}\right\}(1-\rho_0^2)}; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

откуда

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{2H} = \Phi_0 \frac{\dfrac{1}{2} \dfrac{\lambda}{kH^2} \dfrac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2}}{\left[1 + \dfrac{1+\rho_0^2}{2(1-\rho_0^2)} \dfrac{\lambda}{kH}\right] \ln \rho_0 - \dfrac{\lambda}{kH}}. \tag{25}$$

Из (5), (21) и (25) видно, что наше приближение вызывает следующее искажение граничного условия: коэффициент k/λ является не постоянным, а изменяющимся в пределах

$$\frac{k}{\lambda}\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{kH}\right)^2 \frac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2}\right]. \tag{26}$$

Для практически интересных случаев λ/kH не превосходит 0,1—0,2, и этим изменением можно пренебречь. Тогда при определении теплопотерь и температурного поля можно пользоваться (17), (8), (23) и (24).

Исследования В. И. Черникина ([1]) показывают, что расчет теплопотерь указанным выше способом дает результаты, мало отличающиеся от расчетов по формулам Форхгеймера, Шубина и др.

Расчеты же температурного поля по разным формулам гораздо больше расходятся между собой. Наилучшее совпадение с опытом, согласно В. И. Черникину, дает предлагаемый в настоящей статье способ расчета.

Поступило
30 VIII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Черникин, Диссертация, Моск. нефт. ин-т им. Губкина, 1944.