Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 9

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

МЕТОД СКЛЕИВАНИЯ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Метод построения геометрической фигуры путем складывания частей других фигур столь же стар, как сама геометрия.

В предыдущей заметке (1) я высказал теорему, содержащую общие условия, при которых метрическое многообразие, построенное из замкнутых областей, вырезанных из других многообразий, оказывается локально изометричным выпуклым поверхностям (в пространстве Евклида или Лобачевского). Эта теорема о склеивании, в соединении с общими теоремами существования выпуклой поверхности с данной метрикой (2), приводит к общим условиям, при которых из данного комплекса кусков выпуклых поверхностей можно „склеить" новую выпуклую поверхность. Теорема, содержащая эти условия, была высказана в той же заметке (1). Эти теоремы позволяют применить старый метод склеивания ко многим задачам теории поверхностей. Приложение к одной задаче изгибания выпуклых поверхностей было дано в самой заметке (1). Здесь я намечу ряд примеров применения этого метода, взятых из разных областей задач, для того чтобы показать объем и характер этого „метода склеивания".

1. Погружение. Пусть R — двумерное многообразие с внутренней метрикой, локально изометричное выпуклым поверхностям*. Проблема погружения состоит в вопросе о существовании выпуклой поверхности, изометричной R. Метод склеивания позволяет сводить такого рода задачи к тому случаю, когда R гомеоморфно сфере.

Рассмотрим простейший пример. Пусть R гомеоморфно плоскости и полно. Тогда для всякого односвязного геодезического многоугольника $G \subset R$ и точки $A \in R - G$ существует кратчайшая кривая L среди всех кривых, имеющих концы в A и охватывающих G. Эта кривая ограничивает геодезический многоугольник $H \supset G$, все углы которого $< \pi$, кроме, может быть, угла при A.

Пусть B такая точка на L, что обе дуги AB имеют равные длины. Тогда, согласно теореме о склеивании, отожествляя эти дуги, мы можем „склеить" из H замкнутую выпуклую поверхность F. Теперь, задав последовательность многоугольников G_n, $G_n \subset G_{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n = R$, мы получим последовательность поверхностей F_n, и сходящаяся их подпоследовательность даст, как предел, выпуклую поверхность, изометричную всему R.

В случае другого топологического строения многообразия рассуждение будет таким же (ср. (3)).

* Достаточно предположить, что R удовлетворяет одной из совокупностей условий, указанных в (2); в частности, R может быть римановым многообразием с гауссовой кривизной, ограниченной снизу.

2. Изгибание. Пусть F такая выпуклая поверхность, гомеоморфная кругу, что поворот* ее границы L нигде не отрицателен (т. е. $\geqslant 0$ для каждой дуги). Если F есть геодезически выпуклая область на выпуклой поверхности, то это условие, как легко доказать, выполнено.

Теорема А. *Поверхность F изометрична „шапочке", т. е. такой выпуклой поверхности F', граница L' которой есть плоская кривая и проекция которой на плоскость кривой L' совпадает с областью, ограниченной L'.*

Пусть C — цилиндр, бесконечный в одну сторону и ограниченный кривой L'', перпендикулярной его образующим. L'' — геодезическая на C. Пусть L'' имеет ту же длину, что граница L поверхности F. Тогда, согласно теореме о склеивании, „склеивая" C и F по их границам, получим полную выпуклую поверхность $F'+C'$, где F' и C' изометричны, соответственно, F и C. Но легко доказать, что поверхность, изометричная C, сама есть цилиндр. Следовательно, C' есть выпуклый цилиндр, и так как поверхность $F'+C'$ выпукла, то F' есть „шапочка".

Очевидно также, что F' геодезически выпукла на $F'+C'$. Поэтому мы имеем:

Теорема В. *Для того чтобы выпуклая поверхность, гомеоморфная кругу, была изометрична геодезически выпуклой области на полной выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела всюду неотрицательный поворот.*

3. Теория кривых. Мы докажем одну теорему о квази-геодезических, высказанную в [4]. (По определению, квази-геодезическая есть кривая, поворот которой всюду неотрицателен на обе стороны).

Теорема С. *Пусть L — квази-геодезическая на выпуклой поверхности F и A — точка на L. Существует такая выпуклая поверхность F', изометричная некоторой окрестности U точки A, что кривая L' на F', соответствующая отрезку линии L, лежащему в U, есть предел геодезических линий на выпуклых поверхностях, сходящихся к F'.*

Рассмотрим кривые на F, окружающие маленький геодезический многоугольник, содержащий внутри точку A. Кратчайшая из этих кривых ограничивает выпуклую многоугольную окрестность U точки A.

Пусть L_1 отрезок квази-геодезической L, лежащий в U. Разрежем U вдоль L_1 на две части U_1, U_2 и отождествим стороны разреза с основаниями плоского четыреугольника S_h (с основаниями, равными L_1, и высотой h). Так как поворот квази-геодезической всюду неотрицателен на обе стороны, то к комплексу $U_1+S_h+U_2$ применима теорема о склеивании. Если этот комплекс не геодезически выпуклый, то его можно сделать геодезически выпуклым, присоединяя к нему один или два соответственно подобранных плоских треугольника. Тогда, согласно теореме А, из этого комплекса может быть склеена шапочка F'_h**.

Средняя линия полосы S_h будет геодезической L'_h на F'_h. Возьмем $h \to 0$ и выберем сходящуюся последовательность шапочек F'_{h_i}. Предельная шапочка F' будет изометрична окрестности U, и предел L' геодезических L'_{h_i} будет как раз линией, соответствующей отрезку L_1 квази-геодезической L, ч. и т. д.

---

* Определение дано в [4]. В регулярном случае поворот есть интеграл от геодезической кривизны по дуге.

** Теория А вместе с ее доказательством остается в силе, если поверхность F понимать в ней как абстрактно данное многообразие.

Доказательство другой теоремы о квази-геодезических, высказанной в [4], основано на той же теореме А.

4. Оценки и экстремальные задачи. Метод „разрезывания и склеивания“ оказывается наиболее подходящим синтетическим методом решения многих экстремальных задач. Например, он был применен, хотя и в простейшей форме, еще Штейнером в его классическом доказательстве максимального свойства круга. Если задача касается кривых поверхностей, то этот метод может быть применен к многогранникам, после чего оценка, полученная таким путем, переносится на общие поверхности. Единственность решения может быть доказана посредством „разрезывания и склеивания“, примененных к поверхности, решающей задачу. Задача, решенная в [5], может служить тому примером.

Недостаток места не позволяет изложить здесь какой-либо другой пример. Мы только укажем два результата, получаемых посредством этого метода. Первый из них касается внутреннего определения площади, которое является, повидимому, новым и потому имеет некоторый общий интерес.

Теорема D. *Пусть P — геодезический многоугольник на выпуклой поверхности. Пусть Z — его подразделение на треугольники, стороны которых — кратчайшие линии, d_Z — наибольший диаметр треугольников и σ_Z — сумма площадей плоских треугольников, имеющих стороны той же длины. Рассмотрим последовательность подразделений Z_n с $d_{Z_n} \to 0$. Тогда существует $\sigma = \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{Z_n}$, и так определенное σ может быть принято за площадь многоугольника P. Это σ оказывается равным площади P, определенной любым обычным путем.*

Для произвольного подразделения Z имеет место следующая оценка:

$$0 \leqslant \sigma - \sigma_Z \leqslant \frac{1}{2}\,\omega d_Z^2,$$

где ω — кривизна P (точнее, его внутренней области); равенство имеет место тогда и только тогда, когда комплекс плоских треугольников изометричен P.

Теорема E. *Пусть P — геодезический многоугольник, вырезанный из выпуклой поверхности, имеющий все углы $< \pi$. При данных длинах сторон и углах многоугольник P имеет наибольшую площадь тогда и только тогда, когда он изометричен боковой поверхности пирамиды с теми же данными (такая поверхность существует, если есть хотя бы один P).*

Математический институт
Академии Наук СССР
им. В. А. Стеклова

Поступило
23 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **54**, № 2 (1946). [2] А. Д. Александров, ДАН, **51**, № 6 (1946). [3] А. Д. Александров, Изв. АН СССР, сер. мат., **9**, 113 (1945). [4] А. Д. Александров, ДАН, **47**, № 5 (1945). [5] А. Д. Александров, ДАН, **50** (1945).