Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

К ТЕОРИИ НЕАССОЦИАТИВНЫХ n-ГРУПП С ПОСТУЛАТОМ K

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 12 X 1944)

1. В настоящей работе рассматриваются неассоциативные n-группы Дернте *, удовлетворяющие так называемому постулату K**.

Подробное изложение полученных результатов будет дано в другом журнале.

2. Совокупность $\mathfrak{G}=\{a_m, a_p, \ldots\}$ назовем n-группой с постулатом K, если выполнены следующие требования:

1) Всякой n-местной фигуре — «слову» $a_{m_1}a_{m_2}\ldots a_{m_n}$, все места в которой заняты (может быть, с повторениями) элементами из $\mathfrak{G}$, соответствует некоторый элемент a_m из $\mathfrak{G}$ — «результат» данной операции.

Так как изучаемая операция единственна и нет поэтому опасности смешения, то каждое такое слово заодно считается символом совершения и символом результата операции, что записывается в форме равенства:

$$a_m = a_{m_1}a_{m_2}\ldots a_{m_n}.$$

2) Постулат K. Для всякого места $i\leqslant n$ существует такое место j (отличное или совпадающее с i), что будет выполняться соотношение

$$a_{m_1}a_{m_2}\ldots a_{m_{i-1}}(a_{m_i}\ldots a_{m_{i+n-1}})\,a_{m_{i+n}}\ldots a_{m_{2n-1}}=$$
$$=a_{p_1}a_{p_2}\ldots a_{p_{j-1}}(a_{p_j}\ldots a_{p_{j+n-1}})\,a_{p_{j+n}}\ldots a_{p_{2n-1}},$$

где последовательность $2n-1$ символов $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_{2n-1}}$ получается некоторой подстановкой θ из последовательности символов a_{m_1}, $a_{m_2}, \ldots, a_{m_{2n-1}}$, причем эта подстановка θ зависит лишь от i и j, но не зависит от того, какие элементы $\mathfrak{G}$ изображаются этими символами. Места i и j назовем ассоциативными друг с другом.

Тем самым все места в формуле действия распределятся на классы взаимно ассоциативных мест.

3) Задание элементов a_m и $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_{i-1}}, a_{m_{i+1}}, \ldots a_{m_n}$ в равенстве $a_m = a_{m_1}a_{m_2}\ldots a_{m_i}\ldots a_{m_n}$ вполне и единственным образом определяет элемент a_{m_i} при любом i, т. е. операция однозначно обратима относительно любого места i формулы действия.

В дальнейшем символы вида ω_N, $\omega^*_{N^*}$, $\psi_P, \ldots$ будут обозначать комплексы ([3]), элементы которых входят в $\mathfrak{G}$ и у которых множествами индексов всех их элементов соответственно являются N, N^*,

---

* Сам Дернте рассматривал в своей работе ([1]) только ассоциативные группы.

** Термин «постулат K» принадлежит А. К. Сушкевичу, который рассматривал в ([2]) один частный вид этого постулата.

$P, \ldots$ Символ вида $(a)_M$ будет указывать, что все элементы комплекса с множеством индексов M равны a. Если i будет являться одним из индексов комплекса, то точно так же $(a)_i$ будет обозначать, что элемент a комплекса имеет в нем индекс i.

Такая символика удобна тогда, когда нужно показать, что данный комплекс распадается на теоретико-множественную сумму некоторых своих подкомплексов, чего не позволяет менее гибкая «мультипликативная» форма записи комплексов в виде «слов».

Запишем с помощью этой символики постулат K. Так как каждый из символов $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_{2n-1}}$, находящихся в левой части равенства, выражающего постулат K, входит и в правую часть этого равенства, и обратно, то их можно распределить на следующие четыре категории:

I. Те символы, которые, находясь внутри скобок в левой части, оказываются в правой части также внутри скобок. Следовательно, такие символы образуют по отношению к комплексу, стоящему внутри скобок в левой части, подкомплекс ω_N, а по отношению к комплексу, стоящему внутри скобок в правой части,— подкомплекс $\omega^*_{N^*}$.

II. Те символы, которые, находясь в левой части вне скобок, в правой части оказываются внутри скобок.

Такие символы по отношению ко всему комплексу, стоящему в левой части, образуют подкомплекс ψ_P; по отношению к комплексу, стоящему внутри скобок в правой части, подкомплекс $\psi^*_{P^*}$.

III. Те символы, которые, находясь в левой части внутри скобок, в правой части оказываются вне их.

Подобно предыдущему видим, что такие символы по отношению к левой и правой частям образуют соответственно подкомплексы χ_R и $\chi^*_{R^*}$.

IV. Те символы, которые, находясь в левой части вне скобок, оказываются вне скобок и в правой части.

Они образуют аналогичным образом по отношению к левой и правой частям соответственно подкомплексы φ_S и $\varphi^*_{S^*}$.

Ясно, что N, N^*, P, P^*, R, R^*, S, S^* являются подмножествами множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Учитывая способ их получения, мы обозначим эти множества через $N = (i\theta j)$, $N^* = (j\theta^{-1}i)$, $P = [i\theta j]$. Отсюда следует, что

$$P^* = M - (j\theta^{-1}i), \quad R = M - (i\theta j), \quad R^* = [j\theta^{-1}i],$$
$$S = M - [i\theta j] - \{i\}, \quad S^* = M - [j\theta^{-1}i] - \{j\}.$$

Символы одной и той же соответствующей категории дают, очевидно, одно-однозначное отображение каждого из множеств N, P, R, S соответственно на N^*, P^*, R^*, S^*. Такие отображения, соответствующие при этом друг другу элементы и сами комплексы ω_N и $\omega^*_{N^*}$, ψ_P и $\psi^*_{P^*}$, χ_R и $\chi^*_{R^*}$, φ_S и $\varphi^*_{S^*}$ назовем взаимными. Раньше мы уже условились считать комплексы с множеством индексов M и с элементами из $\mathfrak{G}$ за символы результатов нашей операции; следовательно, равенства между такими комплексами должны в дальнейшем пониматься не в смысле теории множеств [3], а в смысле равенства изображаемых этими комплексами результатов операций. Поэтому, суммируя символы всех четырех категорий, можно записать постулат K в форме такого условного равенства между комплексами

$$(\omega_{(i\theta j)} + \chi_{M-(i\theta j)})_i + \psi_{[i\theta j]} + \varphi_{M-[i\theta j]-\{i\}} =$$
$$= (\omega^*_{(j\theta^{-1}i)} + \psi^*_{M(j\theta^{-1}i)})_j + \chi^*_{[j\theta^{-1}i]} + \varphi^*_{M-[j\theta^{-1}i]-\{j\}}. \qquad (1)$$

3. Приведем следующие образцы теорем, доказываемых при помощи формулы (1).

Теорема 1 (типа о правой и левой единицах). *Если места i и j ассоциативны, то из равенства $a_{M-(i\theta j)} + \varepsilon_{(i\theta j)} = a$, где a — любой элемент $\mathfrak{G}$, а $\varepsilon_{(i\theta j)}$ — комплекс, все элементы которого входят в $\mathfrak{G}$, следует равенство $(a)_{M-(j\theta^{-1}i)} + \varepsilon^{*}_{j\theta^{-1}i)} = a$. Другими словами, если комплекс $\varepsilon_{(i\theta j)}$ «единичен» по отношению к a, то будет «единичным» к a и взаимный комплекс $\varepsilon^{*}_{(j\theta^{-1}i)}$.*

Пусть теперь $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{H}$ удовлетворяет по отношению к нашему действию тем же постулатам, что и $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{H}$ назовем подгруппой $\mathfrak{G}$.

Под символом вида $(\mathfrak{H})_N$ будем подразумевать совокупность всех возможных комплексов вида ε_N, элементы которых входят в $\mathfrak{H}$.

Теорема 2 (типа разложения по модулю). *Если места i и j в формуле действия ассоциативны и если множества элементов $\mathfrak{G}$, изображаемые формулами $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \eta_{M-(i\theta j)}$ и $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \zeta_{M-(i\theta j)}$, имеют общий элемент, то множества элементов $\mathfrak{G}$, изображаемые формулами $(\mathfrak{H})_{M-[j\theta^{-1}i]} + \eta^{*}_{[j\theta^{-1}i]}$ и $(\mathfrak{H})_{M-[j\theta^{-1}i]} + \zeta^{*}_{[j\theta^{-1}i]}$, совпадают, причем здесь $\eta_{M-(i\theta j)}$ и $\zeta_{M-(i\theta j)}$ — любые комплексы с множеством индексов $M-(i\theta j)$ и составленные из элементов $\mathfrak{G}$.*

Из теоремы 2 следуют некоторые формулы «разложения по модулю», на которых мы, ввиду краткости настоящего сообщения, останавливаться не будем.

Отметим еще следующие два частных случая теоремы 2.

Теорема 3. *Если i и j ассоциативны и если всякий элемент $M-(i\theta j)$ совпадает со своим взаимным элементом из $[j\theta^{-1}i]$, то множества элементов $\mathfrak{G}$, изображаемые формулами $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \eta_{M-(i\theta j)}$ и $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \zeta_{M-(i\theta j)}$, или совпадают или не имеют общих элементов.*

Легко проверить, что условия теоремы 3 выполняются для обычных n-групп Дернте.

Если множество элементов $\mathfrak{G}$, доставляемых формулой $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \eta_{M-(i\theta j)}$ при любом комплексе $\eta_{M-(i\theta j)}$ с множеством индексов $M-(i\theta j)$, составленном из элементов $\mathfrak{G}$, совпадает со множеством элементов $\mathfrak{G}$, доставляемых формулой $(\mathfrak{H})_{M-[j\theta^{-1}i]} + \eta^{*}_{[j\theta^{-1}i]}$, то $\mathfrak{H}$ назовем $[j\theta^{-1}i]$-инвариантной в $\mathfrak{G}$.

Теорема 4. *Если i и j ассоциативны и $\mathfrak{H}[j\theta^{-1}i]$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то множества элементов $\mathfrak{G}$, доставляемые формулами $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \eta_{M-(i\theta j)}$ и $(\mathfrak{H})_{(i\theta j)} + \zeta_{M-(i\theta j)}$, или совпадают или не имеют общих элементов.*

Теорема 5 (обобщенная Дернте, см. ([2]), стр. 160, теорема 4). *При произвольных a и b из $\mathfrak{G}$ имеем: $(a)_{M-(i\theta j)-\{t\}} + (b)_t + \eta_{(i\theta j)} = b$, если $(a)_{M-(j\theta^{-1}i)} + \eta^{*}_{(j\theta^{-1}i)} = a$ и t, входя в $M-(i\theta j)$, имеет i своим взаимным элементом в $[j\theta^{-1}i]$.*

4. Применение комплексов с упорядоченными множествами индексов и, следовательно, и «слов» в теории ассоциативных групп основано на том, что такая символика позволяет с большим удобством обозревать и осуществлять многочисленные преобразования одной итерации данного действия в другую. Но для построения теории n-групп с постулатом K применение упорядоченных комплексов и «слов» уже не вызывается существом дела и может быть избегнуто, в чем можно убедиться из нижеследующего.

Введем операцию укрупнения комплексов, состоящую в том, что в комплексе некоторый его подкомплекс начинает рассматриваться как самостоятельный элемент, получающий определенный индекс. Обратный процесс назовем «подразделением» комплекса. Операцию, составленную из конечного числа «укрупнений» и «подразделений», назовем элементарной. Пусть дано множество $\mathfrak{G}$, элементы которого мы назовем «объектами операции», и «основное» множество M из n элементов, не обязательно упорядоченное. Пусть теперь всякому комплексу η_M, элементами которого являются объекты операции, поставлен в соответствие с помощью определенного правила, основанного на природе индексов и элементов этого комплекса, определенный объект из $\mathfrak{G}$, который мы назовем «результатом» операции над вошедшими в η_M элементами из $\mathfrak{G}$, или, иначе, «значением» комплекса η_M. Далее условимся, в случае, когда дано одно-однозначное отображение g некоторого множества N на M, придавать всякому комплексу ζ_N, составленному из элементов $\mathfrak{G}$, то же значение, какое имеет комплекс, получаемый из данного ζ_N заменой его индексов на соответствующие им при отображении g элементы M. Комплексы, которым таким путем присвоено определенное значение, назовем допустимыми. Будем также считать, что всякий допустимый комплекс обозначает заодно также и результат изображаемого им действия. При этих условиях назовем допустимым элементарным преобразованием такое элементарное преобразование, при котором применяются лишь допустимые подкомплексы. Пусть теперь дано R — некоторое множество комплексов, составленных из элементов $\mathfrak{G}$, причем каждый комплекс из R определенным заданным допустимым элементарным преобразованием переводится в некоторый n-членный допустимый комплекс, значение которого присвоим исходному комплексу. Предположим, что установленная таким путем операция такова, что значение каждого комплекса из R не изменяется при любом его допустимом элементарном преобразовании, что и характеризуется равенствами вида (1), причем эти равенства также указывают, какие элементы комплекса можно ассоциировать в допустимые подкомплексы, чтобы осуществлялись его всевозможные допустимые элементарные преобразования. Таким образом, при отказе от идеи упорядоченности и от применения «слов» при обозначении комплексов постулат K приобретает смысл ассоциативного закона в своеобразной общей форме. При этом роль, аналогичную роли упорядоченности и «слов» в теории обычных ассоциативных групп, должны здесь, повидимому, играть частичная упорядоченность без свойства транзитивности и полигональные фигуры, сходные со структурными формулами химии. Предыдущие построения могут быть распространены и на случай бесконечных комплексов.

Поступило
21 VIII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Dörnte, Mathem. Z., **29**, 1 (1928). [2] А. К. Сушкевич, Теория обобщенных групп, Харьков—Киев, 1937. [3] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, стр. 21.