Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ МЕТАГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 22 IX 1944)

1. Известно [1], что функция $u(x_1, \ldots, x_p)$ $(p \geqslant 1)$, аналитическая в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, разлагается в ряд

$$u(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x_1, \ldots, x_p)\, r^{2k} \quad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_i^0)^2\right), \tag{1}$$

где $u_k(x_1, \ldots, x_p)$ — гармонические функции в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, которые называются гармоническими коэффициентами функции u. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри некоторой достаточно малой сферы с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. При $u \equiv 0$ все $u_k \equiv 0$, что доказывает однозначность разложения (1).

В настоящей работе будут доказаны при помощи некоторых наших старых результатов [2–5] более точные предложения относительно области сходимости ряда (1) для функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям вида

$$\Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + a_n u \quad (n \geqslant 1), \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные, а Δ — оператор Лапласа: $\Delta = \sum_{i=1}^{p} \partial^2/\partial x_i^2$.

2. Рассмотрим сперва функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \qquad (\lambda = \mathrm{const}). \tag{3}$$

Такие функции, если они непрерывны вместе со своими производными первых двух порядков, будем называть метагармоническими функциями с параметром λ. Изучим сначала разложения в ряд вида (1) метагармонических функций, зависящих от двух переменных x, y.

Если $u(x, y)$ — функция, метагармоническая в конечной односвязной области T, принимающая, вообще говоря, комплексные значения, то, как было мною показано [2], ее можно представить в виде

$$u(x, y) = \varphi(z) - \int_0^z \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\lambda \sqrt{\bar{z}(z-t)}\right) \varphi(t)\, dt +$$

$$+ \overline{\psi(z)} - \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} J_0\left(\lambda \sqrt{z(\bar{z}-\bar{t})}\right) \overline{\psi(t)}\, d\bar{t}, \tag{4}$$

где $z=x+iy$, φ и ψ — голоморфные функции в области T, которые связаны с функцией u следующим образом:

$$\varphi(z)=u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\frac{1}{2}u(0, 0), \quad \psi(z)=\overline{u\left(\frac{\bar{z}}{2}, \frac{i\bar{z}}{2}\right)}-\frac{1}{2}\overline{u(0, 0)}. \tag{5}$$

Начало координат ($z=0$) принадлежит области T, а верхняя черта обозначает комплексно-сопряженное значение.

Интегрированием по частям из (4) получаем:

$$u(x, y)=\sum_{k=0}^{m} u_k(x, y)\, r^{2k}+R_m(x, y), \tag{6}$$

где

$$u_0(x, y)=\varphi(z)+\overline{\psi(z)}, \tag{7}$$

$$u_k(x, y)=\frac{(-1)^k(\lambda/2)^{2k}}{k!\,(k-1)!}\left[\frac{1}{z^k}\int_0^z (z-t)^{k-1}\varphi(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\bar{z}^k}\int_0^{\bar{z}}(\bar{z}-\bar{t})^{k-1}\overline{\psi(t)}\,d\bar{t}\right] \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

$$R_m(x, y)=(-1)^m\int_0^z \frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m+2}} J_0\left(\lambda\sqrt{\bar{z}(z-t)}\right)dt\int_0^t \frac{(t-\sigma)^m}{m!}\varphi(\sigma)\,d\sigma+$$

$$+(-1)^m\int_0^{\bar{z}}\frac{\partial^{m+2}}{\partial \bar{t}^{m+2}} J_0\left(\lambda\sqrt{z(\bar{z}-\bar{t})}\right)d\bar{t}\int_0^{\bar{t}}\frac{(\bar{t}-\bar{\sigma})^m}{m!}\overline{\psi(\sigma)}\,d\bar{\sigma}. \tag{8}$$

Докажем теперь, что на любом замкнутом множестве A, принадлежащем T и не имеющем общих точек с ее границей, R_m равномерно стремится к нулю при $m\to\infty$.

Заключим множество A внутрь замкнутой многоугольной области A_0, принадлежащей области T и не имеющей общих точек с ее границей. Пусть d — диаметр области T, а l — периметр A_0. Пусть $z\in A_0$. Тогда нетрудно видеть, что в интегралах, входящих в (7) и (8), мы можем взять в качестве путей интеграции такие кусочно-гладкие кривые, длины которых не превосходят $d+l$. Кроме того, функции φ и ψ равномерно ограничены на A_0. Поэтому будем иметь

$$\left|\int_0^z (t-\sigma)^k\varphi(\sigma)\,d\sigma\right|\leqslant Md^k, \quad \left|\int_0^{\bar{z}}(\bar{t}-\bar{\sigma})^k\overline{\psi(\sigma)}\,d\bar{\sigma}\right|\leqslant Md^k, \tag{9}$$

где z и t — любые точки из A_0, а M — положительная постоянная. Используя, далее, формулу

$$J_0(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\zeta^{-1}e^{\zeta-\frac{\omega^2}{4\zeta}}\,d\zeta, \tag{10}$$

сразу получим оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}J_0\left(\lambda\sqrt{\bar{z}(z-t)}\right)\right|\leqslant Nd^k, \tag{11}$$

где N — положительная постоянная, не зависящая от z и t ($z, t\in A_0$). На основании (9) и (11) из (8) сразу получим

$$R_m(x, y)\leqslant\frac{2MN(d+l)\,d^{2m+2}}{m!}. \tag{12}$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что R_m равномерно стремится к нулю на A_0 при $m \to \infty$, а это доказывает наше утверждение. На основании доказанного предложения из (8) получим

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y)\, r^{2k}. \tag{13}$$

Итак, нами установлена следующая

Теорема 1. *Если $u(x, y)$ — метагармоническая функция в конечной односвязной области T, то она разлагается в ряд* (13), *где u_k — гармонические функции, которые определяются при помощи формул* (5) *и* (7). *Этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри области T, и его можно дифференцировать почленно любое число раз.*

3. Если $u(x_1, \ldots, x_p)$ — функция, метагармоническая в звездной области D с центром в начале координат, то, как известно [4], мы можем ее представить в виде

$$u(x_1, \ldots, x_p) = u_0(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) -$$

$$- \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} J_0\left(\lambda \sqrt{r(r-\rho)}\right) u_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\, d\rho, \tag{14}$$

где u_0 — гармоническая функция в D, которая однозначно определяется при помощи u; $r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ — полярные координаты точки $(x_1, \ldots, x_p)$. В формуле (14) интеграл берется по лучу, соединяющему начало координат с точкой $(x_1, \ldots, x_p)$.

Интегрированием по частям из (12) получим

$$u(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{k=0}^{m} u_k(x_1, \ldots, x_p)\, r^{2k} + R_m(x_1, \ldots, x_p), \tag{15}$$

где

$$u_k(x_1, \ldots, x_p) = \frac{(-1)^k (\lambda/2)^{2k}}{k!\,(k-1)!} \frac{1}{r^{k+q}} \int_0^r (r-\rho)^{k-1} \rho^q u_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\, d\rho, \tag{16}$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots;\ q = \frac{p-2}{2}\right),$$

$$R_m(x_1, \ldots, x_p) =$$

$$= (-1)^m r^{-q} \int_0^r \frac{\partial^{m+1}}{\partial \rho^{m+1}} J_0\left(\lambda \sqrt{r(r-\rho)}\right) d\rho \int_0^{\rho} \frac{(\rho-\rho_1)^{m-1}}{(m-1)!} \rho_1^{\,q} u_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\, d\rho. \tag{17}$$

Из последней формулы легко получим, что R_m равномерно стремится к нулю при $m \to \infty$ на любом замкнутом множестве, принадлежащем D и не имеющем с ее границей общих точек. Поэтому из (15) получим

$$u(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x_1, \ldots, x_p)\, r^{2k}, \tag{18}$$

где u_k — гармонические функции в D, определенные при помощи формул (16). Таким образом нами установлена следующая

Теорема 2. *Если $u(x_1, \ldots, x_p)$ — метагармоническая функция в звездной области D, то она разлагается в ряд* (18), *который абсолютно и равномерно сходится внутри D, причем его можно дифференцировать почленно любое число раз.*

Очевидно, в случае $p=2$ эта теорема является частным случаем теоремы 1.

4. Перепишем уравнение (2) в виде ([5])

$$\Delta^k(\Delta+\varkappa_1)^{k_1}\ldots(\Delta+\varkappa_m)^{k_m}\, u=0. \tag{19}$$

Всякое решение этого уравнения, как известно ([5]), можно представить в виде

$$u=v+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=0}^{k_i-1} r^s\frac{\partial^s u_{is}}{\partial r^s}, \tag{20}$$

где v — k-гармоническая функция, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta^k v=0$, а u_{is} — метагармонические функции с параметром $\varkappa_i$.

Рассмотрим сначала случай $p=2$. Пусть $u(x,\ y)$ — регулярное решение уравнения (2) в конечной односвязной области T. Тогда метагармонические функции u_{is}, входящие в (20), на основании теоремы 1 можно представить рядами вида (13). При этом нетрудно заметить, что и функции $r^s\frac{\partial^s u_{is}}{\partial r^s}$ представляются аналогичными рядами в D; для этого достаточно произвести над рядом (13) операцию $r^s\frac{\partial^s}{\partial r^s}$ и принять во внимание, что если w — гармоническая функция, то и функция $r^k\frac{\partial^k w}{\partial r^k}$ — также гармоническая. Приняв также во внимание, что k-гармоническая функция v имеет вид

$$v=v_0+v_1r^2+\ldots+v_{k-1}r^{2k-2},$$

где $v_0,\ v_1,\ldots,\ v_{k-1}$ — гармонические функции, из формулы (20) получим следующую теорему:

Теорема 3. *Если функция $u(x,\ y)$ является регулярным решением уравнения* (2) *в конечной односвязной области T, то она разлагается в этой области в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида* (1).

На основании теоремы 2 и формулы (20) совершенно аналогично получается

Теорема 4. *Если функция $u(x_1,\ldots,x_p)$ — регулярное решение уравнения* (2) *в звездной области D, то она в этой области разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида* (1).

Очевидно, в случае $p=2$ теорема 4 является частным случаем теоремы 3.

Тбилисский математический институт
Академии Наук Грузинской ССР

Поступило
22 IX 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Cioranescu, Bull. de la soc. math. de France, LXV, 41 (1937). [2] И. Н. Векуа, ДАН, XVI, 3, 155 (1937). [3] И. Н. Векуа, Сообщения АН ГССР, IV, 5 (1943). [4] И. Н. Векуа, Сообщения АН ГССР, III, 4 (1942). [5] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. мат. ин-та, XII, 105 (1943).