Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Член-корреспондент АН СССР И. С. БРУК

# О КОЛЕБАНИЯХ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

При внезапной нагрузке синхронной машины, работающей параллельно с мощной сетью, или при внезапном изменении напряжения на клеммах нагруженной машины возникают механические колебания ротора машины, могущие в некоторых случаях привести к выпадению из синхронизма.

Вопрос о допустимой нагрузке „толчком“ исследован рядом авторов. При некоторых упрощающих предположениях о характеристике синхронизирующего момента Ollendorf и Peters ([1]) получили оценки для допустимой толчкообразной нагрузки при наличии успокоительного момента. Этот же вопрос несколько позже был подробно рассмотрен в работе акад. Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова ([2]), в которой дана интерполяционная формула для определения допустимой нагрузки с учетом затухания.

Для некоторых практических расчетов существенно не только определение допустимой нагрузки, но и самого движения ротора. Численное интегрирование, к которому в этом случае прибегают, трудоемко и приводит часто к накоплению ошибок.

При некоторых, не слишком грубых, допущениях относительно характеристики вращающего момента синхронной машины, можно, как показано ниже, получить простое аналитическое решение, удобное для построения эффективного метода расчета для ряда сложных случаев.

Уравнение движения ротора синхронной машины, работающей параллельно с мощной сетью, записывается в следующем виде:

$$T_a \frac{d^2\delta}{dt^2} + P(\delta) = P, \tag{1}$$

где $T_a$ — постоянная времени разбега машины, $\delta$ — угол сдвига фаз между вектором эдс машины и вектором напряжения сети, $P(\delta)$ — синхронизирующий момент, $P$ — механический момент на валу машины, который условимся считать положительным при работе машины генератором. Для машины с ненасыщенной магнитной цепью и симметричным ротором можно принять

$$P(\delta) = \frac{UE'}{x'} \sin\delta = P_m' \sin\delta, \tag{2}$$

где $U$ — напряжение на клеммах, $E'$ — эдс за переходным реактанцем, $x'$ — переходный реактанц.

Введя новую независимую переменную $\tau = \sqrt{P_m/T_a}\, t$, приведем уравнение (1) к виду:

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \sin\delta = \frac{P}{P_m}. \tag{3}$$

Первый интеграл уравнения (3) дает:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\delta}{d\tau}\right)^2 = \frac{P}{P_m}(\delta - \delta_0) + \cos\delta - \cos\delta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\delta}{d\tau}\right)_0^2, \tag{4}$$

где $\delta_0$ — начальная фаза и $(d\delta/d\tau)_0$ — начальная скорость.

Рассмотрим прежде всего случай, когда начальная скорость (в относительном движении) $(d\delta/d\tau)_0 = 0$.

В интервале $0 < \delta < \pi$ правая часть (4) может быть представлена следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\delta}{a\tau}\right)^2 = (\delta - \delta_0)(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)F(\delta). \tag{5}$$

В интересующем нас интервале $F(\delta)$ сохраняет знак, и ее можно приближенно заменить подходящим образом выбранной постоянной. Геометрический смысл корней $\delta_1$ и $\delta_2$ иллюстрируется „правилом площадей“ (рис. 1).

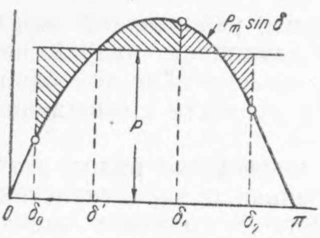

Рис. 1

Одинаково заштрихованные площади — равны. Если корни $\delta_1$ и $\delta_2$ вещественны ($\delta_2 > \delta_1$), то движение будет ограничено, и $\delta_0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$. Ротор будет совершать колебания. Предельный режим наступает, когда $\delta_2 = \delta_1$. К этому положению ротор стремится асимптотически. Условие $\delta_2 = \delta_1$ определяет, следовательно, максимально допустимую нагрузку (при отсутствии затухания). При большей нагрузке $\delta_1$ и $\delta_2$ становятся мнимыми. Машина выпадает из синхронизма.

Положив в уравнении (5) $F(\delta) = c$ и проинтегрировав, получим

$$\tau = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{2c(\delta - \delta_0)(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}}. \tag{6}$$

Обращение интеграла (6) дает (для вещественных $\delta_1$ и $\delta_2$, $\delta_1 \neq \delta_2$):

$$\delta = \delta_0 + (\delta_1 - \delta_0)\,\mathrm{sn}^2\,\varepsilon\tau, \tag{7}$$

где sn — эллиптический синус для модуля $k$

$$k = \sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_0}{\delta_2 - \delta_0}}, \tag{7a}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{c}{2}(\delta_2 - \delta_0)}\ . \tag{7b}$$

Постоянной $c$ можно распорядиться различно. Либо так, чтобы при $\delta = \delta'$ ($\sin\delta' = P/P_m$) (рис. 1) значение кинетической энергии, вычисленной по формуле (5), совпало с вычисленным по формуле (4) (при $\delta = \delta'$), либо так, чтобы при $\delta = \delta'$ кинетическая энергия имела экстремум (для $P/P_m < 1$), и, наконец, можно постоянной $c$ придать некоторое значение так, чтобы получить наилучшее приближение к функции, определяемой (4).

Для практических расчетов можно ограничиться более грубым приближением, заменив $\sin\delta$ в интервале $0 < \delta < \pi$ параболой $1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)^2$.

Положив для краткости $\frac{\pi}{2} - \delta = \theta$, получим:

$$\tau = \int\limits_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\pi \sqrt{\frac{8}{3}(\theta_0 - \theta)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)}}, \tag{8}$$

$$\theta = \theta_0 - (\theta_0 - \theta_1)\,\mathrm{sn}^2\,\varepsilon\tau. \tag{9}$$

$k$ и $\varepsilon$ по (7a) и (7b). $\theta_1$ и $\theta_2$ — корни уравнения

$$\theta^2 - \theta_0\theta - \frac{3}{4}\pi^2\left(1 - \frac{P}{P_m}\right) + \theta_0^2 = 0. \tag{10}$$

В случае двойного корня ($\delta_1 = \delta_2$) эллиптическая функция вырождается ($k = 1$), и движение определяется выражением:

$$\theta = \theta_0\left(1 - \frac{3}{2}\,\mathrm{th}\,\varepsilon\tau\right). \tag{11}$$

Характер движения иллюстрируется рис. 2, на котором дан график $\delta(\tau)$ для $P/P_m = 0{,}7$, $\delta_0 = 15^\circ$ (колебательный режим).

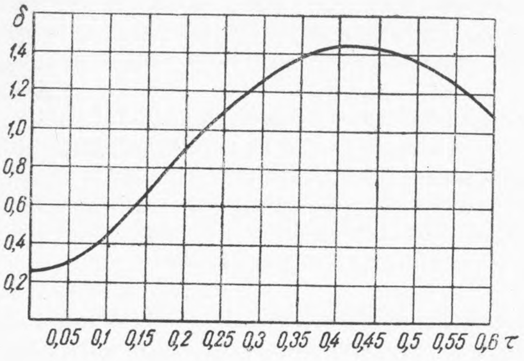


Рис. 2

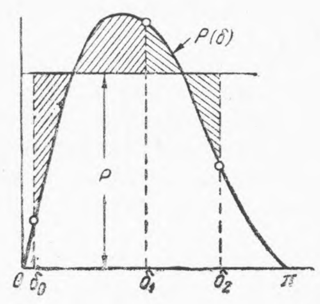


Рис. 3

При большой нагрузке корни уравнения (9) становятся мнимыми. Решение через эллиптические функции не имеет в этом случае практического значения.

Таким образом, пользуясь таблицами эллиптических функций, можно без большой затраты времени вычислить движение ротора.

Если начальная скорость не равна нулю, то необходимо определить другое значение начальной фазы по формуле (4) так, чтобы

$$\frac{P}{P_m}(\delta_0 - \delta_0') + \cos\delta_0 - \cos\delta_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{d\delta}{d\tau}\right)_0^2,$$

и рассматривать движение с нулевой начальной скоростью и начальной фазой $\delta_0'$.

Пользуясь выражением (5) для кинетической энергии, можно приближенно рассмотреть и случай, когда характеристика синхронизирующего момента $P(\delta)$ определяется более сложной зависимостью, нежели (2).

Например, для явнополюсной машины

$$P(\delta) = \frac{UE}{x_d} \sin \delta + \frac{U^2}{2} \frac{x_d - x_q}{x_d x_q} \sin 2\delta.$$

В этом случае следует определить корни $\delta_1$ и $\delta_2$ из условия равенства площадей, одинаково заштрихованных на рис. 3, т .е. найти корни трансцендентного уравнения

$$\frac{P}{P_m}(\delta - \delta_0) + \cos\delta - \cos\delta_0 + \frac{1}{4}\frac{U}{E}\frac{x_d - x_q}{x_d x_q}(\cos 2\delta - \cos 2\delta_0) = 0$$

и, определив постоянную $c$ в интеграле (6) по указанному выше способу, вести вычисления по формуле (7).

Поступило
21 IV 1947

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Ollendorf·u. W. Peters, Wissensch. Veröffentl. aus. dem Siemans-Konzern, **6**, S. 7 (1926). [2] Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, О колебаниях синхронных машин, Харьков, 1932.