

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. АНДРОНОВ, Н. БАУТИН и Г. ГОРЕЛИК

**АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ СХЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ
АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВИНТ ИЗМЕНЯЕМОГО ШАГА**

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 22 XI 1944)

Работа В. Боднера (1) привлекла наше внимание к исследованию автоколебаний, возникающих в некоторых случаях при работе автоматических винтов изменяемого шага. Мы здесь рассматриваем более простую схему, чем Боднер (отвлекаясь от изменения скорости самолета и от инерции индикатора), но даем точное решение, позволяющее получить полную картину влияния параметров схемы на существование автоколебаний. Мы рассматриваем агрегат коленчатый вал — лопасти винта — индикатор как систему лишь с тремя степенями свободы, конфигурация которой задается углами поворота вала θ и лопастей φ и смещением муфты регулятора ζ , — при том как систему вырожденную, во-первых, потому, что пренебрегаем инерцией индикатора и сервомотора и, во-вторых, потому, что принимаем для трения в индикаторе закон Кулона*. Исследуемая задача, близкая к классической задаче Леоте (2), отвечает также ряду других устройств автоматического регулирования.

1. Уравнение вращения коленчатого вала мотора примем в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_1(\omega, \lambda) - M_2(\omega, \varphi), \quad (1a)$$

где $\omega = \dot{\varphi}$, t — время, J — момент инерции, λ — параметр, характеризующий впуск газа, M_1 — момент, развиваемый мотором, M_2 — нагрузочный момент винта. Уравнение движения муфты индикатора имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = - \frac{\partial V}{\partial \zeta} + Q(\dot{\zeta}), \quad (1b)$$

где $T = T(\zeta, \dot{\zeta}, \omega)$ — кинетическая энергия системы, $V(\zeta)$ — потенциальная энергия пружин и грузов индикатора, $Q(\dot{\zeta})$ — сила трения.

Уравнение движения сервомотора можно принять в виде

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P_1(\zeta) - P_2(\dot{\varphi}, \varphi), \quad (1c)$$

где J_0 — момент инерции, $P_1(\zeta)$ — момент активных сил, $P_2(\dot{\varphi}, \varphi)$ — момент сил сопротивления.

Будем рассматривать движения в окрестности равновесного режима $\omega_0, \zeta_0, \varphi_0$. Вводя новые переменные соотношениями $\omega = \omega_0 +$

* Предполагается, что в нашей схеме изменение шага имеет целью обеспечить возможность изменять силу тяги посредством регулирования подачи газа, не меняя при этом числа оборотов.

$+\eta$, $\zeta = \zeta_0 + \xi$, $\varphi = \varphi_0 + \chi$, получим, делая очевидные упрощения и пренебрегая инерцией индикатора и сервомотора, следующие уравнения движения (ср. (1)):

$$\frac{d\eta}{dt} = -M\eta - N\chi, \quad a\xi - b\eta = Q(\xi), \quad \frac{d\chi}{dt} = F(\xi). \quad (2)$$

Константы M , N , a , b положительны. Мы примем, что $Q(\xi) = -K$ для $\xi > 0$, $Q(\xi) = +K$ для $\xi < 0$, $|Q(\xi)| < K$ для $\xi = 0$, где K — положительная константа (закон Кулона). Тогда второе уравнение (2) дает

$$a\xi - b\eta = \begin{cases} -K & \text{(откуда } \dot{\xi} = \frac{b}{a}\dot{\eta} \text{ для } \xi > 0, \\ +K & \text{(откуда } \dot{\xi} = \frac{b}{a}\dot{\eta} \text{ для } \xi < 0, \\ |a\xi - b\eta| < K & \text{ для } \xi = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для сервомотора мы примем обычную ломаную характеристику

$$F(\xi) = -F(-\xi) = \begin{cases} 0 & \text{для } |\xi| < \bar{\psi}_0 \\ \alpha(\xi - \bar{\psi}_0) & \text{для } \bar{\psi}_0 < \xi < \bar{\psi}_1 \\ +A & \text{для } \bar{\psi}_1 < \xi. \end{cases}$$

Положим

$$\frac{a\xi}{2K} = x; \quad \frac{b\eta}{2K} = y; \quad -\frac{b}{2K}\left(\eta + \frac{N}{M}\chi\right) = z; \quad Mt = \tau'; \quad (4)$$

$$\frac{\alpha\bar{\psi}_0}{2K} = \psi_0; \quad \frac{\alpha\bar{\psi}_1}{2K} = \psi_1; \quad \frac{bN}{2KM^2}\bar{A} = A \quad \left(\alpha = \frac{A}{\psi_1 - \psi_0}\right)$$

и будем рассматривать x , y , z как декартовы координаты. Система (2) принимает вид

$$\frac{dx}{d\tau'} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{d\tau'} = z, \quad \frac{dz}{d\tau'} + z = g(x). \quad (5)$$

На основании (3) изображающая точка может находиться только либо между плоскостями $x - y = \pm 1/2$, либо на полуплоскости (H): $x - y = 1/2$, $z < 0$, либо на полуплоскости (H'): $x - y = -1/2$, $z > 0$. При этом $f \equiv 0$ между плоскостями $x - y = \pm 1/2$; $f \equiv z$ на полуплоскостях H , H' , а $g(x) = -g(-x)$, где $g(x) \equiv -A$ для $x > \psi_1$; $g(x) \equiv \equiv -\alpha(x - \psi_0)$ для $\psi_0 < x < \psi_1$; $g(x) \equiv 0$ для $|x| < \psi_0$ *

2. В силу уравнений (5): 1) интересующая нас часть трехмерного фазового пространства, ограниченная полуплоскостями H и H' , заполнена кусками траекторий, лежащих в параллельных полуплоскостях $x = \text{const}$; 2) разбиение на траектории полуплоскостей H и H' состоит из: отрезков прямых для $|x| < \psi_0$; кусков траекторий, принадлежащих устойчивому фокусу или узлу, для $|\psi_0| < |x| < |\psi_1|$; кусков кривых $x = A - z - A \ln c(z - A)$ для $x < -\psi_1$ и $x = -A - z + A \ln c(z + A)$ для $x > \psi_1$; соединение кусков траекторий происходит вдоль прямых $x = \pm \psi_0$ и $x = \pm \psi_1$; 3) полоса $|x| < \psi_0$, $|x - y| < 1/2$, $z = 0$, является полосой покоя. Изображающая точка, двигаясь в полуплоскостях H или H' , либо сразу попадает на край полосы покоя, либо попадает на полупрямые (L): $x - y - 1/2 = 0$, $z = 0$, $x < -\psi_0$ или (L'): $x - y + 1/2 = 0$, $z = 0$, $x > \psi_0$ и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую

* При $\psi = 0$, $A = \infty$, получается задача, уже исследованная Андроновым и Баутиным (3).

(рис. 1). Фазовое пространство симметрично относительно начала координат.

Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (L') на полуплоскость H' (H), а преобразованием E^+ (E^-) переход точки полуплоскости H' (H) на полупрямую L' (L).

3. Преобразование S^+ преобразует полупрямую L в кривую Γ :

$$\left. \begin{aligned} x + \psi_0 &= \frac{1}{\alpha(1 - \tau - e^{-\tau})}, z = \frac{1 - e^{-\tau}}{e^{-\tau} + \tau - 1} \\ 0 < \tau < \infty, -\psi_1 &\leq x \leq -\psi_0, \\ z &= A(1 - e^{-\tau^*}), A(e^{-\tau^*} + \tau^*) = 1 + A, \\ x &\leq -\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma)$$

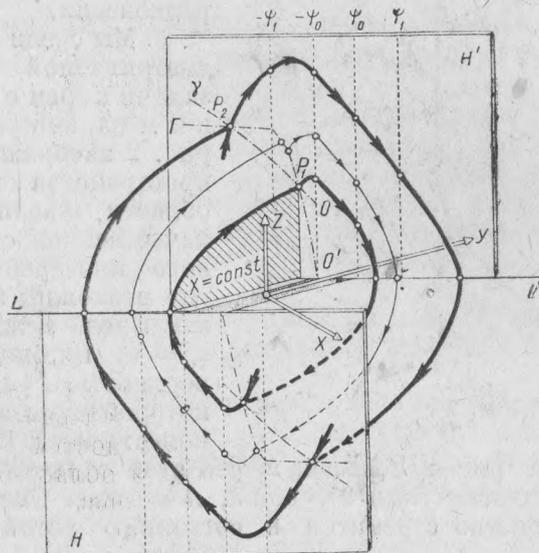


Рис. 1

Геометрическим местом точек, для которых $|x|$ не изменяется в результате E^+ , является кривая γ , определяемая для $x \leq \psi_1$ уравнением

$$\begin{aligned} &\sqrt{u^2 - u(\psi_1 - \psi_0) + \alpha(\psi_1 - \psi_0)^2} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(\psi_1 - \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2u - (\psi_1 - \psi_0)} \right] - \\ & - \sqrt{v^2 + v(\psi_1 - \psi_0) + \alpha(\psi_1 - \psi_0)^2} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(\psi_1 - \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2v + (\psi_1 - \psi_0)} \right] = \\ & = 2\psi_0 \quad (0 < \operatorname{arctg} < \pi), \end{aligned}$$

где

$$A - u = (A - z) \exp \left(\frac{\psi_1 + x + z - u}{A} \right), \quad v + A = \exp \left(\frac{\psi_1 + x + v}{A} \right),$$

а для $-\psi_1 \leq x \leq -\psi_0$ уравнением

$$\begin{aligned} &\sqrt{z^2 + z(x + \psi_0) + \alpha(x + \psi_0)^2} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{-(x + \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2z + x + \psi_0} \right] + \\ & + (x + \psi_0)\sqrt{\alpha} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{4\alpha - 1} \right] = 2\psi_0 \quad (0 < \operatorname{arctg} < \pi). \end{aligned}$$

Точки H разбиваются кривой γ на три класса: а) принадлежащие γ ; для них E^+ не изменяет $|x|$; б) расположенные между γ и

продолжением L' ; для них E^+ уменьшает $|x|$; в) остальные точки; для них E^+ увеличивает $|x|$.

4. Кривые Γ и γ могут иметь две различных точки пересечения, либо две слившихся, либо ни одной. Пусть P_1 — первая точка пересечения (считая от $x = -\psi_0$), P_2 — вторая. Тогда через P_1 проходит неустойчивый, а через P_2 устойчивый предельный цикл. Если начальное отклонение* достаточно мало, система

придет к состоянию равновесия; в противном случае установятся автоколебания. Если γ не пересекает Γ , то при любых начальных условиях устанавливается состояние равновесия,

5. Мы свели параметры рассматриваемой динамической задачи к трем существенным параметрам ψ_0 , α , A . На рис. 2 изображено разбиение пространства параметров на области, различающиеся по качественной структуре фазового пространства. Область, где возможны автоколебания, заключена между плоскостью $\psi_0 = 0$, цилиндрической поверхностью $[A]$, образующие которой параллельны оси A , и поверхностью $[\alpha]$, проходящей

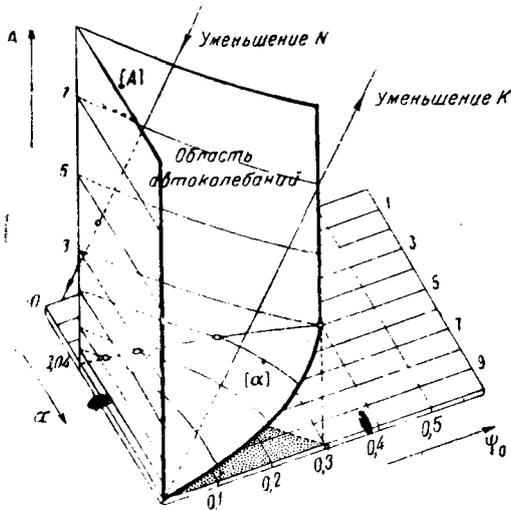


Рис. 2

через ось α . На рис. 2 показана часть этой области произвольными плоскостями $\alpha = \text{const}$, $A = \text{const}$. Вне области автоколебаний устройство стремится к состоянию устойчивого равновесия**.

Рис. 2 в сочетании с формулами (4) показывает, что от автоколебаний всегда можно избавиться, например, любым из следующих простейших способов: 1) уменьшением сухого трения K , 2) уменьшением A ; 3) уменьшением α ; 4) увеличением ψ_0 (ширины зоны нечувствительности); 5) уменьшением эффективности регулирующего действия винта N .

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета
Горьковский институт водного транспорта

Поступило
22 XI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Боднер, Теория автоматического ВИЩ, Сб. научно-технической конференции ВВА, М., 1944, стр. 242. ² H. Léauté, J. de L'Ecole Polytechnique, 55, 1 (1885). ³ А. Андронов и Н. Баутин, ДАН, XLVI, № 7 (1945).

* Обусловленное, например, тем, что при $\tau' = 0$ произошло резкое изменение λ и система оказалась в новом, неравновесном состоянии, являвшемся при старом значении λ равновесным.

** Из рис. 2 видно, что: 1) при $\alpha < 3,04$ не может быть автоколебаний; 2) каждому $\alpha > 3,04$ соответствует такое значение $\psi_0 = \psi_0'$ (тем большее, чем больше α), что при $\psi_0 > \psi_0'$ не может быть автоколебаний; 3) каждым $\alpha > 3,04$; $\psi_0 < \psi_0'$ соответствует такое значение $A = A'$ (тем большее, чем больше ψ_0'), что при $A > A'$ существуют, а при $A < A'$ отсутствуют автоколебания; 4) каждому A соответствует такое $\psi_0 = \psi_0''$, что при $\psi_0 > \psi_0''$ не может быть автоколебаний.