

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. МАРЧЕНКО

**БЕЗМОМЕНТНАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ БОЛЬШИХ  
СМЕЩЕНИЯХ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 10 I 1947)

В настоящей работе рассматривается замкнутая безмоментная сферическая оболочка, находящаяся под действием внутреннего давления и сжимаемая между двумя параллельными плоскостями. Явления, сопровождающие обжатие такой оболочки, во многом сходны с явлениями, сопровождающими обжатие покрышки пневматика авиационного или автомобильного колеса, поскольку в обоих случаях имеет место уплощение неразвертывающихся поверхностей при больших смещениях и значительных поворотах линейных элементов, однако наличие осевой симметрии в первой задаче сильно облегчает разыскивание решения, а также анализ процесса деформации.

Пользуясь соотношениями Гаусса — Кодацци, уравнениями равновесия и законом Гука, можно получить независимую систему уравнений, описывающих форму и напряженное состояние как в произвольной осесимметричной оболочке (например сферической), так и в пневматике.

В первом случае можно эти уравнения преобразовать к следующему виду:

плоская область:

$$r\ddot{r} + (1 - \nu)\dot{r}^2 + (2\nu - 1)\sec\varphi r\dot{r} + \nu\sec^2\varphi \sin\varphi r^2 = 0; \quad (1)$$

криволинейная область:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= -t \sin\chi, \quad \dot{t}r + (1 - \nu)tr + (2\nu - 1)\sec\varphi r\dot{r} + \nu\sec^2\varphi \sin\varphi r^2 = 0, \\ \cos\chi &= \frac{\frac{a}{2}(r^2 - r_0^2)}{\left\{ \frac{1}{1 - \nu^2} [t + \nu r \sec\varphi] - \frac{1 + \nu b}{1 - \nu} \right\} r} \end{aligned} \right\} (2)$$

Здесь:  $\varphi$  — широта точки на недеформированной сфере;  $r, z$  — безразмерные декартовы координаты меридионального сечения деформированной оболочки:  $(\dot{\phantom{a}}) = \frac{d}{d\varphi}(\phantom{a})$ ;  $t = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}$ ;  $\chi$  — угол внешней нормали с осью  $Or$  в деформированном состоянии;  $r_0$  — безразмерный радиус плоской области;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $h$  — толщина оболочки;  $\Delta p$  — превышение внутреннего давления над внешним;  $\bar{R}$  — радиус недеформированной сферы;

$$a = \frac{\Delta p \bar{R}}{Eh}, \quad b = \frac{1 + \Delta p}{2E}.$$

Ограничиваясь правой нижней четвертью меридиана и считая в ней  $\varphi$  отрицательным, мы должны решить уравнения (1) и (2) при следующих краевых и контактных условиях:

$$\text{при } \varphi = -90^\circ \quad r = 0; \quad (3)$$

$$\text{при } \varphi = -\varphi_0 \quad \begin{cases} r(-\varphi_0 - 0) = r_0, \\ \dot{r}(-\varphi_0 - 0) = t(-\varphi_0 + 0), \\ r(-\varphi_0 + 0) = r_0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{при } \varphi = 0 \quad \frac{a}{2} (r^2 - r_0^2) = \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} [t + \nu r] - \frac{1+\nu b}{1-\nu} \right\} r \quad (5)$$

( $-\varphi_0$  — значение параметра  $\varphi$ , при котором криволинейная часть переходит в плоскую).

Уравнение (1) с помощью подстановки:

$$r = (-x)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2-\nu}}, \quad x = -\operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2}, \quad \frac{d}{d\varphi} = -\sqrt{1-x} (1-x) \frac{d}{dx} \quad (6)$$

переходит в уравнение Гаусса:

$$x(1-x)y'' + (2-3x)y' - (1+\mu^2)y = 0, \quad \mu^2 = \frac{\nu(1-\nu)}{2},$$

и потому его общее решение (в окрестности особой точки  $x=0$ ) будет:

$$\begin{aligned} r = & \left\{ c_1 \operatorname{tg}^{2-\nu} \frac{90^\circ + \varphi}{2} f_1 \left( \mu^2, -\operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} \right) + \right. \\ & + c_2 \left[ \operatorname{tg}^{-\nu} \frac{90^\circ + \varphi}{2} - \mu^2 \operatorname{tg}^{2-\nu} \frac{90^\circ + \varphi}{2} f_1 \left( \mu^2, -\operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} \right) \ln \operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \mu^2 \operatorname{tg}^{2-\nu} \frac{90^\circ + \varphi}{2} f_2 \left( \mu^2, -\operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2-\nu}}, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$f_1(\mu^2, x) = F(1+i\mu, 1-i\mu, 2, x) \quad (8)$$

гипергеометрическая функция;

$$\begin{aligned} f_2(\mu^2, x) = & \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{1+\mu^2} \right) \frac{1+\mu^2}{1!2!} x + \dots + \left[ \frac{n+2}{n+1} + 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \right. \\ & \left. - 2 \left( \frac{1}{1+\mu^2} + \frac{2}{4+\mu^2} + \frac{3}{9+\mu^2} + \dots + \frac{n}{n^2+\mu^2} \right) \frac{(1+\mu^2) \dots (n^2+\mu^2)}{n!(n+1)!} x^n + \dots \right] \quad (9) \end{aligned}$$

Применительно к рассматриваемой краевой задаче константу  $c_2$  следует положить равной нулю, вследствие чего решение значительно упрощается.

В случае растяжения произвольной осесимметрической оболочки в плоский диск или кольцо получается уравнение такого же типа, как уравнение (1). Это позволяет решить: 1) задачу Ламе для конечных деформаций, 2) задачу растяжения цилиндра и конуса в плоский диск, 3) задачу выворачивания плоского кольца наизнанку и многие другие.

Уравнения (2) преобразованием, подобным (6):

$$r = \frac{1}{\omega^{2-\nu}}, \quad t = \frac{1}{\omega^{2-\nu} \nu} \quad (10)$$

можно записать в несколько более простой форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} &= -(2-\nu) v \sin \chi, & \dot{v} &= \frac{1-2\nu}{2-\nu} \dot{\omega} \sec \varphi - \nu \omega \sec^2 \varphi \sin \varphi, \\ \cos \chi &= \frac{\frac{a}{2} \left[ \omega - r_0^2 \omega^{\frac{-\nu}{2-\nu}} \right]}{\frac{1}{1-\nu^2} [v + \nu \omega \sec \varphi] - \frac{1+\nu b}{1+\nu} \omega^{\frac{1-2\nu}{2-\nu}}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и затем проинтегрировать по методу последовательных приближений, задаваясь параметрами  $r_0$  и  $\varphi_0$  и отыскивая параметр  $a$  в процессе решения.

Очень хорошие результаты получаются, если взять нулевое приближение в виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \lambda \cos^{2-\nu} \varphi + \varepsilon + \mu \sec^{2-\nu} \varphi + \omega \sec^{2(2-\nu)} \varphi, \\ v &= \alpha + \lambda \cos^{1-\nu} \varphi - \nu \varepsilon \sec \varphi + \frac{1-3\nu}{3-\nu} \mu \sec^{3-\nu} \varphi + \frac{2-5\nu}{5-2\nu} \omega \sec^{5-2\nu} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и определить параметры  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $a$  из уравнений (4) и (5), а также из дополнительных уравнений, являющихся следствиями дифференциальных уравнений (2):

$$\text{при } \varphi = -\varphi_0 \quad \dot{\omega} = -(2-\nu) t_0 r_0^{1-\nu} \sin \chi |_{\varphi=-\varphi_0}, \quad (13)$$

$$\dot{\omega} = \left[ \frac{d\omega}{d\varphi} \right]_{\varphi=-\varphi_0}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi = 0 \quad \dot{\omega} \omega^{\frac{2}{2-\nu}} \frac{a}{2} \left( \omega^{\frac{2}{2-\nu}} - r_0^2 \right) = \\ = -(2-\nu) v^2 \left\{ a \omega - \left[ \frac{1}{1-\nu^2} (\nu v + \omega) + \frac{1+\nu b}{1-\nu} \omega^{\frac{1-2\nu}{2-\nu}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Во многих случаях нулевого приближения оказывается достаточно.

Один из случаев расчета по этим формулам представлен на рис. 1.

Исследование уравнений, описывающих процесс сплющивания, позволяет установить три этапа деформации: 1) образование плоской области за счет криволинейной, 2) излом оболочки в месте контакта, 3) сжатие плоской области.

Обжатие оболочки сопровождается выключением уплощенной части из работы по восприятию превышения внутреннего давления над внешним, что приводит к уменьшению внутренних погонных усилий  $T_1$  и  $T_2$  по сравнению с их значениями в надутой, но не сплющенной сфере. Постепенно увеличивая сплющивающую нагрузку, можно понизить их в центре плоской области до нуля, а затем сделать отрицательными.

Так как в направлении от центра плоской области к ее краям усилия растут, то при наличии отрицательных напряжений в центре всегда существует окружность, на которой  $T_1 = 0$ .

Дальнейшее увеличение сплющивающей нагрузки сопровождается увеличением размеров плоской области ( $r_0$ ) и радиуса указанной окружности, а также уменьшением усилия  $T_1$  на пограничном (с криволинейной областью) контуре.

Процесс образования плоской области заканчивается в тот момент, когда окружность нулевых усилий  $T_1$  выйдет на пограничный контур.

Когда  $T_1$  на пограничном контуре стремится к нулю, кривизна меридиана в этом месте стремится к бесконечности, а вторая главная кривизна остается равной нулю (ибо касательная меняется плавно при переходе из плоской области в криволинейную).

С точки зрения статики, равновесие пограничного элемента криволинейной области, описываемое уравнением  $T_1 k_1 + T_2 k_2 = a$ , при

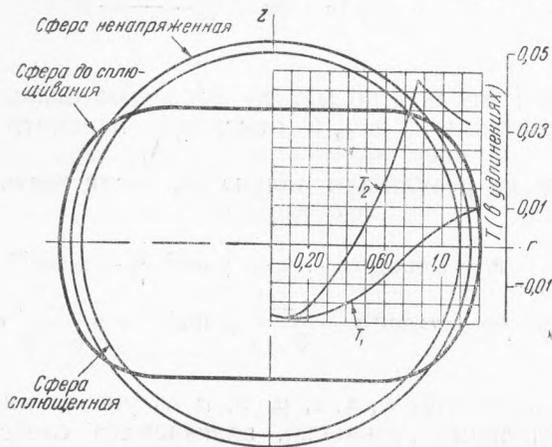


Рис. 1. Форма сплющенной сферы.  
 $\nu=0$ ,  $r_0=0,781$ ,  $\varphi_0=44^\circ$ ,  $a=0,0783$

$T_1 \rightarrow 0$  и  $k_2 \neq 0$  возможно лишь за счет крутого изгиба этого элемента ( $k_1 \rightarrow \infty$ ) и до тех пор, пока  $T_1$ , будучи сколь угодно малым, отлично от нуля.

Если же  $T_1$  в точности обращается в нуль, нормальное давление  $a$  уравновесить нечем, вот почему оболочка должна сломаться.

После излома  $k_2 \neq 0$ , и уравнивание достигается за счет усилий  $T_2$ .

Если допустить, что безмоментная оболочка может работать на сжатие, то дальнейшее повышение сплющивающей нагрузки привело бы к возникновению сжимающих усилий  $T_1$  в том конце меридиана, который упирается в плоскость. Так как это сжимающее усилие должно подходить к плоскости под углом (излом произошел!), то вертикальная составляющая его примет участие в уравнивании сплющивающей нагрузки, а горизонтальная составляющая будет сжимать плоскую область. Таким образом, новый этап деформации мог бы характеризоваться следующими свойствами:

1. Уплотнение криволинейной области прекратилось.
2. Усилие  $T_1$  при переходе из криволинейной области в плоскую меняется скачком (за счет отсутствующей в плоской области вертикальной составляющей).
3. Усилие  $T_2$  (при  $\nu=0$ ) и горизонтальная составляющая усилия  $T_1$  меняются непрерывно.

Поступило  
10 I 1947