

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 II 1947)

Пусть E — множество точек n -мерного евклидова пространства, измеримое в смысле Лебега с конечной мерой. Рассмотрим последовательность суммируемых в E функций

$$f_1(P), f_2(P), \dots, \quad (1)$$

симптотически сходящуюся ⁽¹⁾ к $f(P)$.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(P)$ была суммируема и последовательность

$$\int_e f_1(P) dP, \int_e f_2(P) dP, \dots$$

сходилась к $\int_e f(P) dP$ для каждого измеримого подмножества $e \subseteq E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой частичной последовательности

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots,$$

выбранной из (1), можно было найти неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(P)$ так, чтобы неравенство

$$|\varphi_k(P)| \leq \varphi(P)$$

было выполнено для бесконечного множества значений k .

Доказательство. Сперва мы покажем достаточность условия. Для этого мы допустим противное тому, что мы хотим установить. В таком случае, на основании одной теоремы Витали (²), можно утверждать, что интегралы $\int_e f_k(P) dP$ не могут быть равномерно абсолютно непрерывны. Итак, существует по меньшей мере одно положительное число ε такое, что можно подобрать измеримое множество e_ν и целое положительное число k_ν , для которых неравенства

$$me_\nu \leq \frac{1}{\nu}, \quad \left| \int_{e_\nu} f_{k_\nu}(P) dP \right| \geq \varepsilon$$

выполнены при всех целых положительных значениях ν .

С другой стороны, для последовательности

$$f_{k_1}(P), f_{k_2}(P), \dots$$

можно подобрать суммируемую функцию $\varphi(P)$ таким образом, чтобы неравенство

$$|f_{k_\nu}(P)| \leq \varphi(P)$$

было выполнено для бесконечного множества значений ν . Таким образом, при этих значениях ν будем иметь

$$\int_{e_\nu} \varphi(P) dP \geq \left| \int_{e_\nu} f_{k_\nu}(P) dP \right| \geq \varepsilon,$$

т. е. интеграл от функции $\varphi(P)$ не может быть абсолютно непрерывным. Таким образом, предположение, из которого мы исходим, привело нас к противоречию. Итак, условие достаточно.

Теперь мы покажем необходимость условия. Пусть

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots$$

некоторая частичная последовательность, выбранная из (1). На основании известной теоремы Х. Хана ⁽³⁾ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_k(P) - f(P)| dP = 0.$$

Можно, следовательно, выбрать такую последовательность целых положительных чисел

$$k_1, k_2, k_3, \dots,$$

чтобы ряд

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E |\varphi_{k_i}(P) - f(P)| dP$$

сходился. В таком случае функция

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{k_i}(P) - f(P)|$$

суммируема (на основании одной теоремы Фату ⁽⁴⁾). Рассмотрим теперь суммируемую функцию

$$\varphi(P) = |f(P)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{k_i}(P) - f(P)|.$$

Очевидно,

$$|\varphi_{k_i}(P)| \leq \varphi(P),$$

что и доказывает наше утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(P)$ была суммируема в E и последовательность*

$$\int_e f_1(P) dP, \int_e f_2(P) dP, \dots \tag{2}$$

сходились к $\int_e f(P) dP$ для каждого измеримого подмножества $e \subseteq E$, необходимо и достаточно, чтобы каждая частичная последовательность, выбранная из (2), имела по меньшей мере одну абсолютно непрерывную предельную функцию.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Мы покажем, что условие достаточно. Мы пока предположим, что функция $f(P)$ суммируема. Допустим, что последовательность (2) не сходится

к $\int_e f(P) dP$. В таком случае существует положительное число ε и подмножество $G \subseteq E$, для которых неравенство

$$\left| \int_G [f_k(P) - f(P)] dP \right| \geq \varepsilon$$

выполнено для бесконечного множества значений k

$$k_1, k_2, \dots$$

Выберем из последовательности

$$f_{k_i}(P), f_{k_2}(P), \dots$$

последовательность

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots,$$

которая сходится почти всюду к $f(P)$. Пусть G_ν — множество тех точек, принадлежащих G , в которых выполнено неравенство

$$|\varphi_k(P) - f(P)| \geq \frac{\varepsilon}{2mG}$$

по меньшей мере для одного значения $k > \nu$. Очевидно, имеем

$$G_\nu \supseteq G_{\nu+1}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} G_\nu = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \int_G [\varphi_k(P) - f(P)] dP = \\ &= \int_{G - G_\nu} [\varphi_k(P) - f(P)] dP + \int_{G_\nu} \varphi_k(P) dP - \int_{G_\nu} f(P) dP \end{aligned}$$

и, следовательно, при $k > \nu$

$$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{G_\nu} \varphi_k(P) dP \right| + \left| \int_{G_\nu} f(P) dP \right|.$$

Пусть $J(e)$ — любая абсолютно непрерывная предельная функция последовательности

$$\int_e \varphi_1(P) dP, \quad \int_e \varphi_2(P) dP, \dots$$

В таком случае получаем

$$|J(G_\nu)| + \left| \int_{G_\nu} f(P) dP \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, функции $J(e)$ и $\int_e f(P) dP$ не могут быть одновременно абсолютно непрерывными. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Для того чтобы закончить доказательство, остается показать, что функция $f(P)$ суммируема. Доказательство можно легко провести, пользуясь известным приемом Фату (4).

Поступило
20 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ F. Riesz, C. R., 148, 1303 (1909). ² G. Vitali, Rend. Circ. Mat. Palermo, 23, 137 (1907). ³ H. Hahn, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, IIa, 127 (1918). ⁴ P. Fatou, Acta Mathematica, 30, 375 (1905). ⁵ F. Fichtenholtz, C. R., 184, 436 (1927).