Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. П. НАТАНСОН

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XII 1946)

Условимся в следующих обозначениях: $K_n(t)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция с непрерывной производной $K'_n(t)$ и такая, что при $0<\alpha\leqslant\pi$ и $0<\beta\leqslant\pi$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\alpha}^{\beta} K_n(t)\,dt=1. \tag{1}$$

Для любой суммируемой функции $f(t)$ положим

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x)\,dt. \tag{2}$$

Теорема I. *Если*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt<M \quad (n=1,\,2,\ldots), \tag{3}$$

то для абсолютно непрерывной и 2π-периодической функции $f(t)$ будет

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname*{Var}_{-\pi}^{\pi}[f_n(x)-f(x)]=0. \tag{4}$$

Доказательство. Функция $f_n(x)$ имеет непрерывную производную, которая может быть вычислена по правилу Лейбница

$$f'_n(x)=-\int_{-\pi}^{\pi} K'_n(t-x)\,f(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям и замечая, что внеинтегральные члены, благодаря условию периодичности, исчезают, находим

$$f'_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\,df(t), \tag{5}$$

откуда

$$f'_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,K_n(t-x)\,dt.$$

Таким образом,

$$\operatorname*{Var}_{-\pi}^{\pi}[f_n-f]=\int_{-\pi}^{\pi}\left|f'(x)-\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,K_n(t-x)\,dt\right|dx.$$

С другой стороны, известно ([1]), что в условиях теоремы сингулярный интеграл $g_n(x)$ сходится в среднем (с показателем 1) для любой суммируемой функции $g(x)$. Остается положить $g(x)=f'(x)$.

Замечание 1. Так как $f_n(x)$ абсолютно непрерывна и 2π-периодична, то условия абсолютной непрерывности и 2π-периодичности функции $f(x)$ необходимы.

Замечание 2. Теорема 1 применима к следующим сингулярным интегралам:

$$F_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\dfrac{t-x}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right]^2 dt \quad \text{(интеграл Фейера)}, \tag{6}$$

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt \quad \text{(интеграл Валле-Пуссена)}, \tag{7}$$

$$P_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt \quad \text{(интеграл Пуассона)}, \tag{8}$$

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left[S_n(x)+S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]^* \quad \text{(интеграл Бернштейна-Рогозинского)}. \tag{9}$$

Пусть $\varphi(x)$ $[-\pi\leqslant x\leqslant\pi]$ — функция ограниченной вариации. Будем называть ее „правильной“, если

$$\varphi(x)=\frac{\varphi(x-0)+\varphi(x+0)}{2}, \quad \varphi(\pm\pi)=\frac{\varphi(-\pi+0)+\varphi(\pi-0)}{2}.$$

Пусть, далее $f(x)$ $[-\pi\leqslant x\leqslant\pi]$ — произвольная функция ограниченной вариации.

Условимся обозначать через $\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{Var}^*}}(f)$ полную вариацию правильной функции $\varphi(x)$, совпадающей с $f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, лежащих внутри интервала $(-\pi, \pi)$.

Теорема 2. *Пусть для любой правильной функции $f(x)$ будет*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x). \tag{10}$$

Если при $n\to\infty$

$$\lambda_n=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt\to 1,$$

*а $f(x)$ — **произвольная функция ограниченной вариации, то***

$$\lim_{n\to\infty}\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{Var}}}(f_n)=\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{Var}^*}}(f). \tag{11}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для правильной функции. Но для такой функции из (10) следует, что

$$\varliminf \overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{Var}}} f_n\geqslant\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{Var}}}(f).$$

С другой стороны, из (5) вытекает, что

$$|f'_n(x)|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t-x)|\,dv(t),$$

* $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда Фурье функции $f(x)$.

где $v(t)$ есть полная вариация функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, t]$.

Значит,

$$\mathrm{Var}(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'_n(x)|\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t-x)|\,dx\right) dv(t) = \lambda_n \mathrm{Var}(f)$$

и, стало быть,

$$\overline{\lim}\, \mathrm{Var}(f_n) \leqslant \mathrm{Var}(f).$$

Замечание 1. Эта теорема применима к интегралам (6), (7), (8).

Замечание 2. Пусть $l^*(f)$ есть длина линии $y=\varphi(x)$ $[-\pi \leqslant x \leqslant \pi]$, где $\varphi(x)$ — правильная функция, совпадающая с $f(x)$ во внутренних точках непрерывности $f(x)$. Пользуясь другим методом, С. М. Лозинский доказал, что в условиях теоремы 2 будет

$$\lim_{n\to\infty} l(f_n) = l^*(f),$$

где $l(f_n)$ есть длина линии $y=f_n(x)$. Результат С. М. Лозинского может быть установлен теми же сображениями, что и наша теорема 2.

Действительно, предполагая $f(x)$ правильной, имеем на основании (10)

$$\underline{\lim}\, l(f_n) \geqslant l(f).$$

С другой стороны,

$$l(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |1 + i f'_n(x)|\,dx.$$

Но

$$1 = \frac{1}{\mu_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\,dt,$$

где положено $\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt$. Отсюда и из (5):

$$l(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\,d\left[\frac{t}{\mu_n} + if(t)\right]\right| dx \leqslant \frac{\lambda_n}{|\mu_n|}\, l(\mu_n f),$$

и, стало быть,

$$\overline{\lim}\, l(f_n) \leqslant l(f).$$

Замечание 3. Во всем предыдущем мы предполагали наличие непрерывной $K'_n(t)$. Это условие не лежит в существе дела. Действительно, если $K(t)$ — произвольная суммируемая функция, то существует тригонометрический полином $P(t)$, апроксимирующий ее в среднем с любой точностью. Так как

$$\mathrm{Var}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{K(t-x) - P(t-x)\right\} dt\right] \leqslant \mathrm{Var}(f)\int_{-\pi}^{\pi} |K(t) - P(t)|\,dt,$$

то во всем предыдущем достаточно считать ядро $K_n(t)$ суммируемым.

Поступило
23 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, ДАН, 19, № 5, 357 (1938).