Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 XII 1946)

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы:

Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный на некотором линейном многообразии D_A, плотном в гильбертовом пространстве H. Пусть, далее, существует линейный ограниченный в H оператор M такой, что $MA\varphi=\varphi+t\varphi$, где $t\varphi$ — вполне непрерывный оператор. Тогда для разрешимости уравнения

$$A\varphi=f$$

достаточно, чтобы f была ортогональна к любому решению сопряженного однородного уравнения $A^*\psi=0$.

Обозначим через H_0 и H_0^* подпространства, элементы которых суть решения уравнений $A\varphi=0$ и $A^*\psi=0$, соответственно, и через H_1 и H_1^* — их ортогональные дополнения к H. Будем рассматривать оператор A только на пересечении H_1 и D_A и докажем, что тогда существует обратный оператор A^{-1}, определенный на всем подпространстве H_1^* и ограниченный в нем. Этим наша теорема будет доказана.

Если φ — произвольный элемент из D_A и $f=A\varphi$, то $f\in H_1^*$. Действительно, если $A^*\psi=0$, то $(f,\psi)=(A\varphi,\psi)=(\varphi,A^*\psi)=0$. Далее, если f — данный элемент, то уравнение $A\varphi=f$ имеет в H_1 не более одного решения — в противном случае разность решений принадлежала бы как H_0, так и H_1. Отсюда следует существование обратного оператора A^{-1}, определенного на некотором линейном множестве $H'\subset H_1^*$. Докажем прежде всего, что H' плотно в H_1^*. Действительно, в противном случае нашелся бы элемент $\omega\in H_1^*$ такой, что $(A\varphi,\omega)=0$ для всех φ, принадлежащих пересечению H_1 и D_A. Равенство $(A\varphi,\omega)=0$, очевидно, верно и тогда, когда $\varphi\in H_0$. Но тогда оно верно везде в D_A. Отсюда следует, что ω принадлежит области определения оператора A^* и $A^*\omega=0$. Таким образом, ω принадлежит одновременно двум ортогональным подпространствам H_1^* и H_0^* и, следовательно, $\omega=0$.

Далее, оператор A^{-1} ограничен в H'. Допуская противное, мы найдем, что существует последовательность элементов $\varphi_n\in H_1$ таких, что $\|\varphi_n\|=1$ и $A\varphi_n\to 0$. Так как оператор M ограничен, то $MA\varphi_n=\varphi_n+t\varphi_n\to 0$. Выберем подпоследовательность φ_{n_k} так, чтобы $t\varphi_{n_k}$ стремилось к некоторому пределу, который мы обозначим через — φ_0. Тогда $\varphi_{n_k} \to \varphi_0$ и, так как $A\varphi_{n_k} \to 0$ и оператор A — замкнутый, то $A\varphi_0 = 0$. Это, однако, невозможно, так как $\|\varphi_0\| = 1$ и φ_0 ортогонально к H_0.

Теперь докажем, что $H' = H_1^*$. Пусть f — произвольный элемент из H_1^*. Так как H' плотно в H_1^*, то можно построить последовательность элементов f_n, принадлежащих H' и сходящихся к f. Пусть $\varphi_n = A^{-1} f_n$, так что $A\varphi_n = f_n$. В силу ограниченности A^{-1} последовательность φ_n сходится к некоторому элементу φ_0 и из замкнутости оператора A следует, что $A\varphi_0 = f$. Но тогда $f \in H'$ и, следовательно, $H' = H_1^*$. Теорема доказана.

Наша теорема делается, вообще говоря, неверной, если оператор M — неограниченный. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить

$$A\varphi = \int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad \int_0^1\int_0^1 |K^r(x, s)|\,dx\,ds < \infty,$$

где ядро $K(x, s)$ — симметричное и полное. Здесь можно принять $M = A^{-1}$. Условия ортогональности, упомянутые в теореме, выполняются тождественно, тогда как уравнение

$$\int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

разрешимо не при всякой $f(x)$.

Из доказанной теоремы вытекают, как частные случаи, теоремы о разрешимости сингулярных интегральных уравнений, установленные F. Noether'ом (1) для случая одного уравнения с одной независимой переменной (доказательство F. Noether'a распространено Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (2) на системы уравнений с одной независимой переменной) и автором этой заметки для уравнений и систем уравнений, содержащих многомерные интегралы (3). Сказанное вытекает из следующих фактов: 1) оператор A в указанных случаях — сингулярный и потому ограничен (4,5) и замкнут; 2) оператор M существует и, будучи сингулярным, ограничен.

Ленинградский государственный университет

Поступило 27 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Noether, Math. Ann., **82**, 42 (1921). [2] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. мат. ин-та, **12**, 1 (1943). [3] С. Г. Михлин, ДАН, 54, № 9 (1947). [4] С. Г. Михлин, Матем. сб., **3** (45), № 1, 121 (1938). [5] С. Г. Михлин, ДАН, 19, № 5 (1938).