Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 8

ФИЗИКА

Э. И. АДИРОВИЧ

ВИБРАЦИОННЫЕ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ РАЗРЯДА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 25 X 1944)

1. Лэнгмюр (1) и Тонкс и Лэнгмюр (2) показали, что в плазме возможны локальные (не распространяющиеся) колебания с частотой $\omega_L = \sqrt{4\pi ne^2/m}$, где m — масса, а n — плотность электронов (лэнгмюрова частота). Линдер (3), введя в рассмотрение, наряду с электростатическими силами, также давление электронного газа, показал возможность распространения в плазме продольных волн электронной плотности при частотах бóльших лэнгмюровой. Власовым (4, 5) разработаны общие методы теории вибрационных процессов в плазме, опирающиеся на сочетание кинетического уравнения с макроскопическим учетом взаимодействия через поля объемных зарядов. Однако, вследствие допущенной Власовым математической ошибки при решении уравнения дисперсии, результаты, им полученные, справедливы лишь для ветви локальных колебаний с частотами, меньшими лэнгмюровой. Излагаемая теория, исходящая из схемы учета только «далеких» сил по Власову и дополняющая ее идеей о вычислении входящего в уравнение дисперсии интеграла в смысле его главного значения по Коши, обнаруживает существование в плазме распространяющихся волн плотности с частотами как бóльшими, так и меньшими лэнгмюровой; она охватывает также релаксационные процессы, соответствующие торможению пучка плазмой.

2. Основное уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{4\pi ne^2}{k_0T}\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2} ue^{-\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2k_0T}} \times$$
$$\times \int_{-l}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\, du\, dv\, dw = 0 \tag{1}$$

для «возмущения» функции распределения электронов

$$\Phi(x, u, v, w, t) = f(x, u, v, w, t) - n\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2k_0T}} \tag{2}$$

получено из кинетического уравнения при следующих предположениях: 1) об одномерности задачи; 2) о том, что стационарным распределением электронов плазмы является распределение Максвелла; 3) о малости и кратковременности возмущающих плазму воздействий; 4) о пренебрежении столкновениями. Решение его представляет собой суперпозицию выражений вида

$$\Phi(x, u, v, w, t) = A\frac{ue^{-\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2k_0T}}}{u - k/q}\, e^{qx-kt}, \tag{3}$$

причем величины k и q связаны уравнением дисперсии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{mu^2}{2k_0T}}\,du}{u-k/q} = \frac{k_0T}{2ne^2}\sqrt{\frac{k_0T}{2\pi m}}\,q^2. \tag{4}$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/2}\,dx}{x-\tilde{k}/\tilde{q}} = \sqrt{2\pi}\,\tilde{q}^2, \tag{4'}$$

где
$$\tilde{k} = k\sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}} = \frac{k}{\omega_L}; \quad \tilde{q} = q\sqrt{\frac{k_0T}{4\pi ne^2}} = \frac{q}{q_D}. \tag{5}$$

В том случае, когда $\operatorname{Im}\,\tilde{k}/\tilde{q} \neq 0$, интеграл в (4') есть предел при $b \to \infty$ соответствующего интеграла типа Коши, взятого от $-b$ до $+b$ (неособый случай). При $\operatorname{Im}\,\tilde{k}/\tilde{q} = 0$ этот интеграл следует вычислять как предел при $b \to \infty$ главного значения соответствующего интеграла типа Коши (особый случай).

3. Рассмотрим функцию

$$\psi(\tilde{v}, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(x^2-\tilde{v}^2)}\,dx}{x-\tilde{v}}. \tag{6}$$

Дифференцируя ее по β, получаем уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = -\tilde{v}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,e^{\beta\tilde{v}^2}, \tag{7}$$

откуда находим

$$\psi(\tilde{v}, \beta) = -\tilde{v}\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\beta} \frac{e^{\tilde{v}^2\xi}\,d\xi}{\sqrt{\xi}} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\tilde{v}}. \tag{8}$$

Обозначая $\tilde{k}/\tilde{q} = \tilde{v}$, выражая интеграл в (4') через $\psi(\tilde{v}, 1/2)$, производя в первом из интегралов в (8) замену переменной $\tilde{v}^2\xi = \eta^2$ и вычисляя $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\tilde{v}} = \mp\pi i$, где знак $+$ следует брать, когда $\tilde{v}$ лежит в верхней полуплоскости, а знак $-$, когда $\tilde{v}$ лежит в нижней полуплоскости плоскости комплексных чисел, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/2}\,dx}{x-\tilde{v}} = \sqrt{2\pi} - 2\sqrt{\pi}\,\tilde{v}e^{-\tilde{v}^2/2}\int\limits_0^{\tilde{v}^2/\sqrt{2}} e^{\eta^2}\,d\eta \mp \pi i\tilde{v}e^{-\tilde{v}^2/2}. \tag{9}$$

(9) со знаком плюс и со знаком минус у последнего члена есть запись соответственно $2\pi i\varphi_i(\tilde{v})$ и $2\pi i\varphi_e(\tilde{v})$, где $\varphi_i(\tilde{v})$ и $\varphi_e(\tilde{v})$ — функции, определяемые интегралом типа Коши (4') в верхней и нижней полуплоскости плоскости комплексных чисел. Главное значение по Коши интеграла при $\tilde{v}$ действительном равно

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/2}\,dx}{x-\tilde{v}} = \frac{2\pi i\varphi_i(\tilde{v}) + 2\pi i\varphi_e(\tilde{v})}{2} = \sqrt{2\pi} - 2\sqrt{\pi}\,\tilde{v}e^{-\tilde{v}^2/2}\int^{\tilde{v}/\sqrt{2}} e^{\eta^2}\,d\eta. \tag{10}$$

Решения уравнения дисперсии в неособом и особом случаях изображены графически на рис. 1 и 2. В табл. 1, 2, 3 приведены апроксимативные аналитические выражения этих кривых в окрестности некоторых точек.

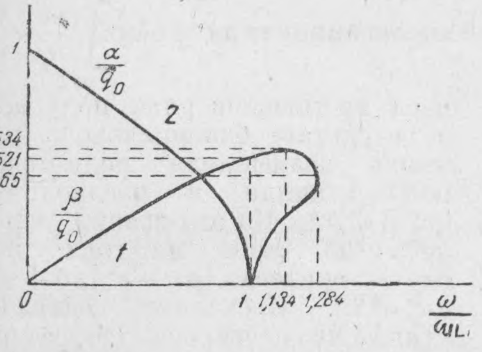

Рис. 1. $\tilde{q}_1 = \alpha/q_D$; $\tilde{q}_2 = i\beta/q_D$; $\tilde{k} = i\omega/\omega_L$

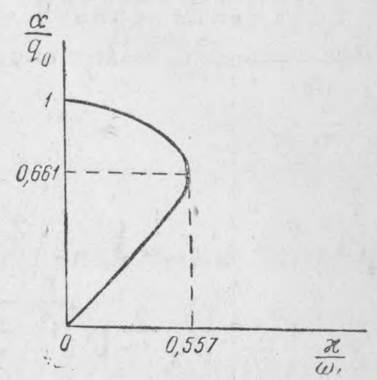

Рис. 2. Зависимость α/q_D от $\varkappa/\omega_L$. $\tilde{q} = \alpha/q_D$; $\tilde{k} = \varkappa/\omega_L$

Выражение (3) вместе с кривыми рис. 1 и 2 и найденным методом вычисления апроксимативных выражений этих кривых в элементарных функциях представляют полное решение задачи о вибра-

Таблица 1

Апроксимативные выражения кривой $\beta(\omega)$ (к рис. 1)

При $\frac{\omega}{\omega_L} \to$	$\frac{\beta}{q_D} \cong$	$\frac{v}{\sqrt{k_0 T/m}} \to$
0	$0,765\frac{\omega}{\omega_L} - 0,448\frac{\omega^3}{\omega_L^3}$	$1,307 \mp 0,003$
1	$0,521 + 0,174\left(\frac{\omega}{\omega_L} - 1\right)$ (верхняя ветвь)	$1,916 \mp 0,007$
1	$\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_L^2} - 1}$ (нижняя ветвь)	∞
1,134	$0,534 - 0,936\left(\frac{\omega}{\omega_L} - 1,134\right)^2$	$2,124 \mp 0,003$
1,284	$0,465 \mp 0,411\sqrt{1,284 - \frac{\omega}{\omega_L}}$	$2,76 \mp 0,01$

ционных ($k = i\omega$) и релаксационных ($k = \varkappa$) процессах в плазме разряда ([6]). Макроскопическими характеристиками этих процессов являются избыточная плотность электронов

$$\Delta n(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, u, v, w, t)\, du dv dw = Cq^2 e^{qx - kt} \qquad (11)$$

и поток электронов

$$S(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\, \Phi(x, u, v, w, t)\, du dv dw = Ckq e^{qx - kt}. \qquad (12)$$

4. Рассмотрение Власова ([4], [5]) соответствует особому случаю уравнения дисперсии, так как для гармонических волн отношение $\tilde{k}/\tilde{q}$ (в обозначениях Власова ω^*/k^*) есть действительное число. Власов апроксимирует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/2}\,dx}{x-\omega^*/k^*}$ первыми членами ряда, получаемого в результате биномиального разложения знаменателя подинтегральной функции в предположении $|x| < \omega^*/k^*$. Но это значит, что написанный выше интеграл берется в пределах от $-c$ до $+c$, где $c < \omega^*/k^*$. Поскольку, однако, в уравнение дисперсии (([4]), формула (39)) входит интеграл с бесконечными пределами, здесь допускается пренебрежение не только высшими степенями ck^*/ω^*, но и интегралами $\int\limits_{-\infty}^{-c} \frac{xe^{-x^2/2}dx}{x-\omega^*/k^*}$ и $\int\limits_{c}^{\infty} \frac{xe^{-x^2/2}dx}{x-\omega^*/k^*}$, один из которых неизбежно расходящийся при $\mathrm{Im}(\omega^*/k^*)=0$. Поэтому дисперсионная формула Власова (([4]), формула (50)) не совпадает с дисперсионной формулой Линдера (([3]), формула (7)), и результаты Власова справедливы лишь для локальных колебаний с частотами $\omega < \omega_L$, когда ω^*/k^* — мнимое число, и остаточный член разложения не содержит особенности в знаменателе подинтегральной функции.

Таблица 2

Апроксимативные выражения кривой $\alpha(\omega)$ (к рис. 1)

При $\frac{\omega}{\omega_L}\to$	$\frac{\alpha}{q_D}\cong$
0	$1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_L}}$
1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\omega}{\omega_L}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_L^2}}$

Таблица 3

Апроксимативные выражения кривой $\alpha(\varkappa)$ (к рис. 2)

При $\frac{\varkappa}{\omega_L}\to$	$\frac{\alpha}{q_D}\cong$	$\frac{v}{\sqrt{k_0T/m}}\to$
0	$1-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{\omega_L^2}$ (верхняя ветвь)	0
0	$0{,}765\frac{\varkappa}{\omega_L}+0{,}448\frac{\varkappa^3}{\omega_L^3}$ (нижняя ветвь)	$1{,}307\mp0{,}003$
0,557	$0{,}661\mp0{,}885\sqrt{0{,}557-\frac{\varkappa}{\omega_L}}$	$0{,}8422\mp0{,}0007$

Поступило
25 X 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Langmuir, Proc. Nat. Ac. Sci., **14**, No. 8, 627 (1928). [2] L. Tonks and I. Langmuir, Phys. Rev., **33**, 195 (1929). [3] E. Linder, Phys. Rev., **49**, No. 10, 753 (1936). [4] А. А. Власов, ЖЭТФ, **8**, № 3, 291 (1938). [5] А. А. Власов, Докторская диссертация, НИИФ МГУ, 1942. [6] Э. И. Адирович, Кандидатская диссертация, НИИФ МГУ, 1944.