Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ, член-корреспондент АН СССР

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАЗРЫВОВ ПРОИЗВОДНЫХ СМЕЩЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

1. Рассматривая время t как пространственную координату, предположим, что обычно рассматриваемые в теории упругости смещения u, v, w определены внутри и на границе цилиндра C с образующими, параллельными оси t, основанием которого служит рассматриваемое упругое тело. Для краткости положим $u=u_1$, $v=u_2$, $w=u_3$. Мы будем предполагать, что вблизи некоторой точки $M(x^0, y^0, z^0)$ это тело ограничено поверхностью $z=f(x, y)$, где функция f имеет непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно, или, как мы будем для краткости говорить, имеет гладкость $(n+2)$-го порядка. Будем сначала предполагать, что $n \geqslant 3$.

Мы рассматриваем, вообще говоря, неоднородное анизотропное упругое тело, свободное от действия внешних сил; предполагаем, что все коэффициенты уравнений упругости и граничных условий имеют гладкость n-го, соотв. $(n+1)$-го, порядка и не зависят от t.

Предположим, что u_i в окрестности $M^0(t^0, x^0, y^0, z^0)$ имеют гладкость n-го порядка, а на поверхности C вблизи этой точки пусть u_i имеют непрерывные производные $(n+1)$-го порядка всюду, кроме некоторой, проходящей через M^0, двумерной поверхности S_2, имеющей гладкость $(n+2)$-го порядка, где они имеют особенности описываемого ниже вида. Нашей задачей является определение наклона S_2 в точке M^0.

2. Выберем в окрестности M^0 какое-нибудь преобразование t, x, y, z, имеющее гладкость $(n+2)$-го порядка и обладающее следующими свойствами: а) оно переводит границу рассматриваемого цилиндра в часть плоскости Π_3, а S_2 в часть плоскости Π_2; б) новые координатные поверхности, проходящие через M^0, касаются старых в M^0; в) новое начало координат находится в точке M^0; г) в точке M $\frac{dt'}{dt}=\frac{dx'}{dx}=\frac{dy'}{dy}=\frac{dz'}{dz}=1$, штрихами обозначены новые координаты.

Перейдем в уравнениях теории упругости, которые мы обозначим (1), к этим новым координатам. Мы найдем, что u_i будут удовлетворять в окрестности M^0 системе (1′) трех однородных линейных уравнений 2-го порядка, где коэффициенты при частных производных 2-го порядка в точке M^0 сохранят те же значения, какие были у первоначальной системы (1). Аналогично граничные условия (2) на свободной поверхности тела заменятся новыми линейными уравнениями (2′) с теми же значениями в точке M^0 при старших, т. е. первых производных. Уравнения (1), (2), (1′) и (2′) мы не выписываем. Будем предполагать, что все члены у этих уравнений записаны в левой части. Функции u_i в окрестности M^0 будут иметь гладкость

n-го порядка. На Π_3 вне Π_2 они имеют гладкость $(n+1)$-го порядка.

Будем предполагать, что на Π_3 вблизи M^0 функции u_i имеют вид

$$u_i(t', x', y', 0) = M_i^{(n+1)}(t', x', y') + a_i(t', x', y')[\tau t' + \alpha x' + \beta y']^{n+1} \ln|t\tau' + \alpha x' + \beta y'| + b_i(t', x', y')[\tau t' + \alpha x' + \beta y']^n |\tau t' + \alpha x' + \beta y'| + R_i(t', x', y'), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $M_i^{(n+1)}(t', x', y')$ — некоторые многочлены $(n+1)$-ой степени от t', x', y'; $a_i(t', x', y')$, $b_i(t', x', y')$ и $R_i(t', x', y')$ — некоторые функции, имеющие гладкость $(n+1)$-го порядка, причем среди чисел $a_i^0 = a_i(0, 0, 0)$, $b_i^0 = b_i(0, 0, 0)$ есть хоть одно, не равное 0, и

$$D^{(k)}R_i(t', x', y') = o([|t'| + |x'| + |y'|]^{n-k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n+1,$$

где $D^{(k)}T_i$ означает какую-нибудь из производных k-го порядка от R_i; уравнение $\tau t' + \alpha x' + \beta z' = 0$ представляет на плоскости Π_3 плоскость Π_2.

3. Уравнения (2) и, следовательно, (2′) могут быть разрешены в точке M^0 относительно $\partial u_i/\partial z$, соотв. $\partial u_i/\partial z'$, так как детерминант, составленный из их коэффициентов, есть один из диагональных детерминантов в основных уравнениях, связывающих напряжения и деформации, а все такие детерминанты положительны, если предположить, как это мы сделаем, что существует упругий потенциал для всякого однородного тела с теми же упругими свойствами, какие имеются в какой-нибудь точке рассматриваемого неоднородного тела. Так же нетрудно видеть, что уравнения (1′) могут быть в точке M^0 разрешены относительно $\partial^2 u_i/\partial z'^2$. Поэтому легко составить многочлены $(n+1)$-й степени $M_i'(t', x', y', z')$, которые совпадают с $M_i^{n+1}(t', x', y')$ при $z' = 0$ и обращают в 0 в точке M^0 левые части уравнений (1′), соотв. (2′), а также и все их частные производные до $(n-1)$-го, соотв. n-го, порядка по t', x', y', z', соотв. по t', x', y'.

Положим на всей рассматриваемой окрестности M^0

$$t' = \varepsilon t'', \quad x' = \varepsilon x'', \quad y' = \varepsilon y'', \quad z' = \varepsilon z'',$$
$$u_i' = u_i - M_i'(t', x', y', z') = \varepsilon^{n+1} u_i'' - M_i''(t'', x'', y'', z'')\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon.$$

Здесь многочлены $M_i''(t', x', y', z)$ построены по $a_i^0(\tau t' + \alpha x' + \beta y')^{n+1}$ так же, как многочлены $M_i'(t', x', y', z')$ были построены по $M_i^{(n+1)}(t', x', y')$. Многочлены $M_i''(t', x', y', z')$ обращают в 0 в точке M^0 левые части уравнений (1′), соотв. (2′), а также и все их частные производные по t', x', y', z' до $(n-1)$-го, соотв. до n-го, порядка по t', x', y', z', соотв. по t', x', y'.

Предположим, что при всяком $\varepsilon > 0$ функции u_i'' имеют в окрестности начала координат ограниченные частные производные до n-го порядка по t'', x'', y'', z''. Так будет, например, если u_i имеют внутри C на достаточно гладких поверхностях только такие особенности, как и на поверхности цилиндра C, или если эти особенности будут регулярно затухать внутри. Тогда по теореме Арцеля можно выбрать такую бесконечную последовательность значений ε, сходящуюся к 0, что в ограниченной области G'' около начала координат в пространстве (t'', x'', y'', z'') функции u_i'' вместе со всеми их частными производными по t'', x'', y'', z'' до $(n-1)$-го порядка включительно будут равномерно сходиться к некоторым предельным функциям u_i^* и их соответствующим производным. Так как

$$u_i''(t'', x'', y'', 0) = a_i(\varepsilon t'', \varepsilon x'', \varepsilon y'')(\tau t'' + \alpha x'' + \beta y'')^{n+1}\ln|\tau t'' + \alpha x'' + \beta y''| + b_i(\varepsilon t'', \varepsilon x'', \varepsilon y'')(\tau t'' + \alpha x'' + \beta y'')^n |\tau t'' + \alpha x'' + \beta y''| + o(\varepsilon),$$

то предельные функции будут сохранять постоянные значения на всех двумерных плоскостях, лежащих в Π_3, параллельных Π_2. Так как, по предположению, не все a_i^0 и b_i^0 равны 0, то все u_i^* не будут на Π_3 тождественно равными 0. Так как мы предполагаем, что $n \geqslant 3$, то функции u_i^* будут удовлетворять по одну сторону Π_3 уравнениям (1*), а на Π_3 линейным однородным уравнениям (2*) с постоянными коэффициентами, равными значениям в точке M^0 соответствующих коэффициентов уравнений (1) и (2), причем эти предельные уравнения будут содержать только члены со старшими производными. Так как уравнения (2*) могут быть разрешены относительно $\partial u_i^*/\partial z''$, то $\partial u_i^*/\partial z''$ будут сохранять постоянные значения на всех двумерных плоскостях, лежащих в Π_3 и параллельных Π_2.

Итак, u_i'' и $\partial u_i''/\partial z''$ сохраняют постоянные значения на всех двумерных плоскостях, лежащих в Π_3 и параллельных Π_2, а внутри G'' функции u_i'' удовлетворяют системе уравнений с постоянными коэффициентами, которая может быть разрешена относительно $\partial^2 u_i''/\partial z''^2$. По теореме об единственности решения задачи Коши при начальных данных, задаваемых на Π_3, отсюда следует, что u_i^* будут сохранять постоянные значения на всех двумерных плоскостях, параллельных Π_2, а не только на тех из них, которые лежат в Π_3. Поэтому внутри G'' величины u_i'' можно считать функциями только от z'' и $p = \tau t'' + \alpha x'' + \beta y''$. Поэтому система основных уравнений упругости для функции u_i^* сводится к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, содержащим только вторые производные по z'' и p.

После этого делаются применимыми обычные рассуждения при нахождении в простейшем случае скорости волн разрывов на плоской поверхности упругого тела, как затухающих внутри тела (волн Рэлея), так и незатухающих.

4. До сих пор мы предполагали, что $n \geqslant 3$. Рассмотрим теперь случай, когда $n = 2$ или $n = 1$. При этом мы будем предполагать, что коэффициенты уравнений (1) и (2), поверхность рассматриваемого тела и проходящая через точку M^0 в поверхности цилиндра C поверхность S_2 — поверхность разрыва старших производных функций u_i — имеют гладкость 5-го порядка. Если разрывы продолжаются внутрь цилиндра C по некоторой поверхности S_3, то мы будем считать эти поверхности имеющими гладкость 5-го порядка. Пусть сами функции u_i вне поверхности разрыва имеют гладкость 4-го порядка, а на поверхности цилиндра C, развернутой в плоскость, пусть u_i имеют вид (3) при $n = 2$ или $n = 1$, где a_i и b_i имеют гладкость 4-го порядка. Пусть такой же вид имеют u_i и внутри C вблизи S_3.

Разберем сначала тот случай, когда $n = 2$ и поверхность S_2 вблизи точки M^0 не имеет касательных, параллельных оси Ot. Построим в окрестности M^0, которую мы будем представлять себе в виде цилиндра с основанием в плоскости $t = t^0 - \varepsilon$, функции

$$U_i(t, x, y, z) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t} u_i(\tau, x, y, z)\, d\tau + M_i(t, x, y, z), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где ε — некоторое малое положительное число, а M_i — некоторые многочлены. Определенные таким образом функции в отношении гладкости обладают такими же свойствами, какими обладали рассмотренные выше функции u_i при $n = 3$. Стоящие в правых частях интегралы мы можем дифференцировать до 3 раз по x, y, z под знаком интеграла. При дифференцировании же этих интегралов по t после дифференцирования под знаком интеграла придется прибавить $u_i(t^0 - \varepsilon, x, y, z)$. Так как при малой сумме $(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2$

точка $(t^0-\varepsilon, x, y, z)$ находится вне поверхности S_2, то мы можем считать здесь все функции $u_i(t^0-\varepsilon, x, y, z)$ имеющими непрерывные производные 5-го порядка по x, y, z. Таким же образом можно поступать при нахождении вторых производных по t от интегралов, входящих в равенство (4). Так как функции u_i удовлетворяют уравнениям (1) и (2), то легко видеть, что после подстановки вместо u_i в левые части уравнений (1) и (2) интегралов, входящих в равенства (4), все члены, содержащие u_i и их производные под знаком интеграла, сократятся, и мы получим линейную комбинацию коэффициентов этих уравнений и функций $u_i(t, x, y, z)$ и их первых производных при $t=t^0-\varepsilon$; эти линейные комбинации будут иметь гладкость 4-го порядка. Так как уравнения (1), соотв. (2), можно разрешить относительно $\partial^2 u_i/\partial z^2$, соотв. $\partial u_i/\partial z$, то мы можем выбрать многочлены $M_i(t, x, y, z)$, входящие в правые части (4), так, чтобы результаты подстановки функций $U_i(t, x, y, z)$ в левые части (1) и (2) в точке M^0 обращались в 0 вместе со всеми их частными производными до 3-го, соотв. 4-го, порядка включительно. Поэтому к определенным таким образом функциям $U_i(t, x, y, z)$ применимы все те рассуждения, какие мы привели выше для случая $n\geqslant 3$.

Если бы поверхность S_2 имела касательные, параллельные оси Ot, то она не имела бы касательных, параллельных какой-нибудь из осей OX, OY, например OX. Тогда функции U_i надо было бы составить при помощи интегралов от u_i по x.

При $n=1$ вместо одинарных интегралов по t от u_i надо брать для составления функций U_i интегралы

$$\int\limits_{t^0-\varepsilon}^{t} dt_1 \int\limits_{t^0-\varepsilon}^{t_1} u_i(t_2, x, y, z)\, dt_2 \quad \text{или} \quad \int\limits_{x^0-\varepsilon}^{x} dx_1 \int\limits_{x^0-\varepsilon}^{x_1} u_i(t, x_2, y, z)\, dx_2.$$

5. Изложенный выше метод применим и в том случае, когда функции u_i имеют на Π_3 особенности некоторых других видов, например, вида $(\tau t'+\alpha x'+\beta y')^{n+\alpha}$, $0<\alpha<1$, или $(\tau t'+\alpha x'+\beta y')^{n+\alpha}$ $\operatorname{sign}(\tau t'+\alpha x'+\beta y')$, $0<\alpha<1$, и др.

Заметим также, что в наших рассуждениях мы использовали только следующие свойства уравнений (1) и (2): а) их линейность и однородность, б) возможность разрешить уравнения (1), соотв. (2), относительно $\partial^2 u_i/\partial z^2$, соотв. $\partial u_i/\partial z$. Поэтому наш метод применим не только к нахождению скорости распространения разрывов на поверхности упругого тела, но и к другим аналогичным задачам.

6. Таким образом мы приходим к следующему выводу. *При сделанных предположениях скорость распространения описанных выше разрывов производных от функций u_i на поверхности однородного, вообще говоря, анизотропного упругого тела произвольной формы, свободного от действия внешних сил в каждой точке M его поверхности, равняется скорости распространения разрывов этих производных на поверхности бесконечного однородного упругого тела, ограниченного плоскостью, у которого всюду параметры, определяющие его упругие свойства, равняются значениям этих параметров в точке M у первоначально рассматриваемого тела.*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
30 I 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 В. И. Смирнов и С. Л. Соболев, Труды Сейсмологического института АН СССР, № 20 (1932).