

*Куручка Константин Сергеевич, канд. техн. наук, доц.
УО «Гомельский государственный технический университет
имени П.О. Сухого», г. Гомель, Беларусь*

***Методика компьютерного моделирования
упругопластических деформаций многопустотных плит***

***The method for modeling elastoplastic deformations
of the multihollow plates***

В статье предложена оригинальная методика и метод определения упругопластических деформаций многопустотных плит. Проведена верификация предлагаемого метода и осуществлено исследование напряжённо-деформированного состояния фрагмента перекрытия, состоящего из двух многопустотных плит, в зоне упругопластических деформаций.

The paper is dedicated to the original method and algorithm for modeling elastoplastic deformations of the multihollow plates. Verification of the proposed methods, algorithm and software solution is executed. The stress-strain state of the overlap fragment, consisting of two multihollow plates, is carried out.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее применяемых элементов современных зданий являются многопустотные плиты перекрытий. Их расчет существующими методами при нагрузках близких к предельным с учётом особенностей структуры представляет определённые трудности [1]. В настоящей работе предлагаются методика и метод исследования напряжённо-деформированного состояния многопустотных плит методом компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются предварительно-напряжённые многопустотные железобетонные плиты перекрытия толщиной 220 мм, длиной 6280 мм, опирающиеся на внутренние стеновые панели и находящиеся под действием значительных вертикальных нагрузок, приводящих к образованию зон упругопластических деформаций. По торцам плиты жёстко закреплены. Открытые пустоты на концах плит перекрытия замоноличены бетоном на глубину 100 мм [2].

3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Решение линейных задач теории упругости методом конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида [1]:

$$\{R\} = [K]\{g\}, \quad (1)$$

где $\{R\}$ – вектор узловых сил;
 $[K]$ – матрица жёсткости;
 $\{g\}$ – вектор узловых перемещений.

Пусть, например, при условии

$$\varphi_1(\{\sigma\}) < 0 \text{ или } \varphi_2(\{\varepsilon\}) < 0, \quad (2)$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений;
 $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций;

φ_1 , φ_2 – произвольные функции, деформирование области до определенного предела определяется линейно-упругим законом

$$\{\sigma\} = [E_0]\{\varepsilon\}, \quad (3)$$

где $[E_0]$ – линейный модуль упругости, а при невыполнении условия (2) деформирование определяется нелинейным законом

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0. \quad (4)$$

Метод переменной жёсткости [1, 3] используется тогда, когда уравнение состояния (4) известно в явном виде. Тогда напряжения можно представить в виде

$$\{\sigma\} = [D(\{\varepsilon\})](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (5)$$

где $[D]$ – модуль объемной деформации;

$\{\varepsilon_0\}$ и $\{\sigma_0\}$ – начальные деформации и начальные напряжения.

Используя (5) для построения уравнения (1), получим

$$[K(\{g\})]\{g\} = \{R\}. \quad (6)$$

Система (6) решается итерационно до тех пор, пока разность между решениями, вычисленными на последующих итерациях не будет превышать некоторого заданного числа – допустимой точности решения:

$$\|\{g\}_{i+1} - \{g\}_i\| \leq \xi. \quad (7)$$

Метод упругих решений [1, 3, 4] применим, если определяющее уравнение (4) разрешимо относительно напряжений. Суть его заключается в рассмотрении последовательности линейных задач теории упругости, решение которых с увеличением порядкового номера сходится к решению задачи теории пластичности. Система (1) преобразуется к виду

$$\{R\} + \Delta\{R(g_i)\} = [K]\{g_{i+1}\}. \quad (8)$$

Метод энергетической линеаризации [1, 3, 5] является двух-проходным. Краевой задаче нелинейной теории упругости для тела объёма V с границей Γ ставится в соответствие краевая задача линейной теории упругости в указанной области. Находится новый

гипотетический модуль упругости и формируется новая матрица жёсткости $[K^*]$ и заново решается система (1).

Методы переменной жёсткости и упругих решений обладают хорошей сходимостью и позволяют найти упруго-пластические деформации за конечное количество итераций. Но из-за большого размера системы (1) время нахождения решения даже на современных компьютерах оказывается значительным [5]. Поэтому применение данным методов оказывается нецелесообразным, т.к. затрудняет процесс исследования.

Метод энергетической линейаризации позволяет найти решение за два прохода. Однако требует формирования новой матрицы жёсткости $[K]$ и повторного решения уже новой системы (1), что так же приводит к значительным временным затратам.

Предлагаемый метод позволяет найти решение за 2 итерации и при этом матрица жёсткости $[K]$ в (1) на каждой итерации остаётся постоянной, что позволяет однократно выполнить процесс её предобусловливания и значительно ускорить время повторного решения системы (1).

4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕДЛАГАЕМОЙ МЕТОДИКИ

Рассматриваются тонкие железобетонные плиты. При проведении исследований принята теория изгиба тонких пластинок, основанная на гипотезах Кирхгофа [4]:

1. В срединной плоскости плита не испытывает никаких деформаций. При изгибе эта плоскость остаётся нейтральной.

2. Точки плиты, лежащие до загрузки на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к её срединной поверхности.

3. Нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости плиты можно пренебрегать.

В процессе нагружения многопустотная плита деформируется линейно-упруго до тех пор, пока величина напряжений не окажется равной некоторой критической величине. В случае если напряжения продолжат расти, материал будет проявлять упругопластические свойства. В качестве критерия пластичности примем соотношение [4]

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_T, \quad (9)$$

где ε_{ii} – интенсивность деформаций;

ε_T – предельное значение интенсивности деформаций, при котором наступает явление пластичности.

Рассматривая процесс активного нагружения, учитываются следующие гипотезы теории малых упругопластических деформаций [4]:

1. Объемная деформация упруга, т.е. за счет пластической деформации изменение объема тела не происходит:

$$\sigma_{cp} = K\theta = 3K\varepsilon_{cp}, \quad (10)$$

где σ_{cp} – среднее нормальное напряжение;

θ – объемная деформация;

ε_{cp} – средняя нормальная деформация;

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – объемный модуль упругости;

E – модуль упругости;

ν – коэффициент Пуассона;

причем $\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$, $\theta = 3\varepsilon_{cp}$,

а σ_x , σ_y , σ_z – нормальные напряжения.

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{ii}}{\varepsilon_{ii}} e_{ij}, \quad (11)$$

где σ_{ii} – интенсивность напряжений;

s_{ij} – компоненты девиатора напряжений;

e_{ij} – компоненты девиатора деформаций.

3. Соотношение

$$\sigma_{ij} = \Phi(\varepsilon_{ij}), \quad (12)$$

где $\Phi(\varepsilon_{ij})$ – универсальная функция, не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

5. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МНОГОПУСТОТНЫХ ПЛИТ

Предположим, что существует такая линейно-упругая монолитная плита одинаковой формы и размеров с исходной многопустотной плитой, деформации которой и при тех же граничных условиях совпадут с деформациями многопустотной плиты. В силу принятых гипотез, будем иметь равенство работ гипотетической упругой плиты и упругопластической. Тогда, согласно принципа минимума потенциальной энергии [1, 4]:

$$\delta_\varepsilon \Pi = \delta_\varepsilon (W - A) = 0.$$

где символ « δ_ε » показывает, что варьируются только деформации и перемещения;

Π – потенциальная энергия плиты;

$W = \int_V U dV$ – работа деформаций;

A – работа внешних сил;

U – удельная потенциальная энергия деформации плиты, будем иметь:

$$\delta_\varepsilon (W^l - W^n) = \delta_\varepsilon \left(\int_V (U^l - U^n) dV \right) = 0, \quad (13)$$

где верхний индекс « l » обозначает отношение к линейно упругой монолитной плите, а верхний индекс « n » – к упругопластической плите;

W^l – работа деформаций в гипотетической линейно упругой плите;

W^n – работа деформаций в гипотетической упругопластической плите;

$U^l = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^l d\varepsilon_{ij}$ – удельная потенциальная энергия деформации линейно упругой плиты;

$U^n = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^n d\varepsilon_{ij}$ – удельная потенциальная энергия деформации упругопластической плиты.

Для линейно-упругой плиты из (13) можно получить

$$U^l = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^l d\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_n^l \varepsilon_n}{2} + K \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (14)$$

Согласно принимаемых гипотез (10)–(12) для упругопластической плиты будем иметь

$$U^n = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^n d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_n} \Phi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n + K \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в (13):

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \left(\int_V \left(\frac{\sigma_n^l \varepsilon_n}{2} - \int_0^{\varepsilon_n} \Phi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \right) dV \right) = \\ = \int_V \delta_\varepsilon \varepsilon_n \left(\frac{\sigma_n^l}{2} - \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} \Phi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\frac{\sigma_{и}^л}{2} = \frac{1}{\varepsilon_{и}} \int_0^{\varepsilon_{и}} \Phi(\varepsilon_{и}) d\varepsilon_{и}.$$

Из последнего соотношения, интегрируя при заданной универсальной функции $\Phi(\varepsilon_{и})$, можно выразить

$$\sigma_{и}^н = \psi(\sigma_{и}^л). \quad (17)$$

Предположим, что существует такая линейно упругая плита с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν одинаковой формы с исходной многопустотной упругопластической плитой и с теми же граничными условиями, деформации которой при некоторых внешних воздействиях R^* совпадут с деформациями упругопластической плиты при заданных нагрузках R . Определим нагрузки R^* . Так как напряжения не зависят от модуля упругости и коэффициента Пуассона, то (17) будет справедливым для любой упругой плиты одинаковой формы с исходной упругопластической плитой и с теми же граничными условиями.

Найдём напряжения $\sigma_{и}^*$ гипотетической плиты при нагрузках R^* . Очевидно, если $\sigma_{и}^н$ – напряжения в упругопластической плите, а $\varepsilon_{и}$ – соответствующие деформации, то имеют место соотношения:

$$\frac{\sigma_{и}^*}{\sigma_{и}^н} = \frac{\varepsilon_{и}}{\varepsilon_{и}^л},$$

где $\varepsilon_{и}^л$ – деформации в гипотетической плите, соответствующие напряжениям $\sigma_{и}^н$.

Воспользовавшись гипотезами Кирхгофа, для упругопластической плиты принцип возможных перемещений [1, 4] перепишем в виде

$$\delta_{\varepsilon} \{g\}^T \{R^*\} = \int_0^b \int_0^a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_{\varepsilon} \{\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dz dx dy, \quad (18)$$

где a , b – размеры плиты вдоль осей X и Y соответственно;

h – толщина плиты.

Считая, что искомые перемещения и деформации известны, выразим их из соотношений для упругой плиты и подставим в соотношения для упругопластической. Т.к. для упругих тел интенсивность деформаций изменяется пропорционально интенсивности напряжений, то несложно будет выразить:

$$\{R^*\} = F(\sigma_n^n, \varepsilon_n^n, \psi(\sigma_n^n), \{R\}, E, \nu). \quad (19)$$

Согласно изложенному выше, процесс нахождения упругопластических деформаций многопустотной плиты будет состоять из двух кратного решения упругой задачи (1). В первом случае с исходным вектором $\{R\}$, а во втором случае с новым вектором $\{R^*\}$, определяемым по формуле (19).

6. ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МНОГОПУСТОТНЫХ ПЛИТ

Модельная задача № 1.

Рассматривается фрагмент перекрытия, состоящий из двух многопустотных плит ПК 63.15.8АТ800А-8 с отверстием в середине пролёта. Расчётный пролёт плиты $L_0 = 6,2$ м, ширина плиты $B = 1,49$ м, рабочая арматура 6Ø14АТ800. Плита имеет 7 отверстий диаметром 159 мм, защитный слой бетона 20 мм, в середине пролёта выполнено сквозное отверстие с размерами 400×1700 мм для сантехнических устройств, модуль упругости бетона 22,4 МПа.

При аппроксимации конечными элементами сквозные горизонтальные отверстия заменялись равновеликими параллелепипедами и исключались из рассмотрения. Цилиндрическая арматура заменялась также равновеликими параллелепипедами. Нелинейный закон

деформирования (4) определялся на основании экспериментальных данных [2] в виде

$$\sigma_{и} = A \varepsilon_{и}^{m-1} \varepsilon_{и},$$

где $A > 0$, $m > 0$.

Точность решений $\xi = 0,001$. Загружение проводилось от 0 Н/м^2 до 5740 Н/м^2 . Граничные условия задавались следующим образом: по боковым плоскостям запрещены перемещения вдоль оси Y, торцы плиты жёстко закреплены.

При моделировании использовались прямоугольные конечные элементы [1]. Фрагмент перекрытия дискретизировался по длине на 200 конечных элементов, по ширине – на 48. Таким образом, для аппроксимации исследуемого фрагмента всего использовалось 9600 конечных элементов. Найденные значения прогибов сравнивались с экспериментальными данными [2] и с данными, полученными из решений другими методами [1, 4]. Результаты расчётов различными методами приведены на рис. 1 и 2.

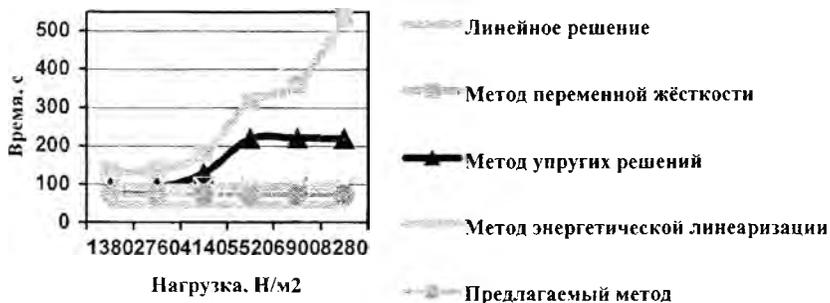


Рис. 1. Время нахождения решения для фрагмента перекрытия с отверстием в середине пролёта

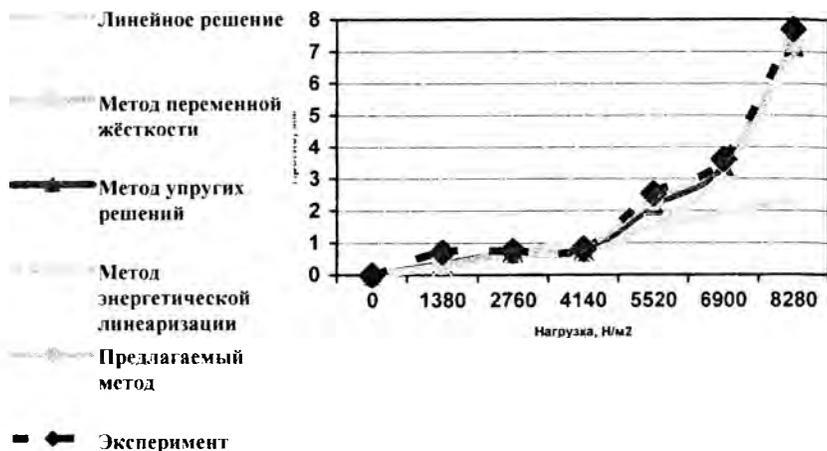


Рис. 2. Максимальный прогиб фрагмента перекрытия с отверстием в середине пролёта

Модельная задача №2.

Рассматривается фрагмент перекрытия, состоящий из двух многпустотных плит ПК 63.15.6АТ800АТ-2 с замоноличенными стыками с верхней связью плит [4].

Расчётный пролёт плиты ПК 63.15.6АТ800АТ-2 $L_0 = 6,2$ м, ширина плиты $B = 1,49$ м, рабочая арматура 5Ø12АТ800. Плита имеет 7 отверстий диаметром 159 мм, защитный слой бетона 20 мм, модуль упругости бетона 22,5 МПа. Модуль упругости бетона замоноличивания 29,5 МПа. Все остальные условия такие же, как и в модельной задаче № 1. Результаты расчётов различными методами приведены на рис. 3 и 4.



Рис. 3. Время нахождения решения для фрагмента перекрытия с замоноличенными стыками с верхней связью плит



Рис. 4. Максимальный прогиб фрагмента перекрытия с замоноличенными стыками с верхней связью плит

7. ВЫВОДЫ

1. При увеличении нагрузки погрешность линейного решения растёт. В зоне предельных нагрузок линейное решение из-за большой погрешности не может применяться для практического использования при расчёте прогибов многопустотных плит, и может быть использовано как некое приближение расчётов.

2. Упругопластические решения, получаемые различными методами, сопоставимы между собой по точности и пригодны для практического использования (см. рис. 2, 4). Однако, при данной дискретизации, из-за большого количества итераций и, как следствие, времени расчёта следует отдавать предпочтение методам с наименьшим количеством итераций. Это в конечном итоге позволит за меньшее время смоделировать большее количество состояний реальной физической системы. Из итерационных методов наиболее эффективным оказался метод упругих решений.

3. Предлагаемая методика позволяет существенно уменьшить время нахождения упругопластического решения (см. рис. 1, 3) за счёт того, что система (1) решается только 2 раза и при этом матрица жёсткости $[K]$ остаётся постоянной. Последнее обстоятельство даёт возможность выполнить преобразования матрицы $[K]$ на этапе нахождения линейного решения, что значительно ускоряет повторное решение системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, В.В. Бондарева. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2002. – 215 с.

2. Золотухин, Ю.Д. Результаты натурных испытаний многопустотных плит перекрытия экспериментального жилого дома с широким шагом несущих железобетонных поперечных стен в г. Речица / Ю.Д. Золотухин, В.С. Кульбицкий // Пространственные конструктивные системы зданий и сооружений, методы расчёта, конструирования и технология возведения: тр. Междунар. науч.-техн. конф. в 2 т. – Минск, 2001. – Т. 1. – С. 59–70.

3. Курочка, К.С. Оценка эффективности некоторых методов решения краевых задач нелинейной теории упругости / К. С. Курочка // Тезисы докладов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы развития транспортных систем». – Гомель: УО «Белорусский государственный университет транспорта», 1998. – С. 204-205.

4. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002.– 416 с.

5. Быховцев, В.Е. Оптимизация алгоритма численного моделирования устойчивости нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев, К.С. Курочка, В.В. Бондарева // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2007. – № 5(44). – С. 3-7.