Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ, НЕ ОБРАЗУЮЩИХ СИСТЕМЫ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 30 XII 1946)

Хорошо известны необходимые и достаточные условия акад. С. Н. Бернштейна [1] для наилучшего приближения данной непрерывной функции $f(x)$ посредством функций, образующих систему Чебышева; если же эти функции не образуют системы Чебышева, то мы имеем только общую теорему Чебышева [2], дающую необходимые условия.

Целью настоящей заметки является вывод достаточных условий в этом общем случае и применение общей теории к одному частному случаю, имеющему непосредственное применение в технике.

I. Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если разность $\Delta(x)=f(x)-\varphi_0(x)$ (где $\varphi_0(x)$ — некоторая непрерывная функция) достигает своего максимального модуля L по крайней мере в $n+2$ различных точках отрезка $[a, b]$, последовательно меняя знак, то для всякой другой непрерывной функции $\varphi(x)$, не равной тождественно $\varphi_0(x)$, имеет место неравенство*

$$\max|f(x)-\varphi(x)|>\max|f(x)-\varphi_0(x)|=L, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

*если только разность $\varphi(x)-\varphi_0(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ не более n нулей *.*

Действительно, предположение

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant L_1<L, \quad a\leqslant x\leqslant b \tag{1}$$

приводит к тому выводу, что разность $\delta(x)=\varphi(x)-\varphi_0(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ $n+1$ нулей, что невозможно. Если же допустим, что $L_1=L$ и обозначим через $\{x_i\}_1^{n+2}$ точки наибольшего отклонения от нуля разности $\Delta(x)$, то в некоторых из них разность $\delta(x)$ обращается в нуль, а в остальных она имеет знак $\Delta(x)$. Пусть, например,

$$\delta(x_{m-1})\neq 0, \quad \delta(x_{m+k})\neq 0, \quad \delta(x_m)=\delta(x_{m+1})=\ldots=\delta(x_{m+k-1})=0, \quad k>0,$$

причем $x_1\leqslant x_{m-1}$, $x_{m+k}\leqslant x_{n+2}$. Если все k нулей $\{x_i\}_m^{m+k-1}$ простые, то функция $\delta(x)$ изменит знак k раз, и мы получим

$$\operatorname{sgn}\delta(x_{m+k})=(-1)^k\operatorname{sgn}\delta(x_{m-1}).$$

Но, так как мы имеем

$$\operatorname{sgn}\Delta(x_{m+k})=(-1)^{k+1}\operatorname{sgn}\Delta(x_{m-1}),$$

* Нули считаются простыми или двойными так же, как в [1].

то при $x_{m-1} \leqslant x \leqslant x_{m+k}$ функция $\delta(x)$ имеет по крайней мере $k+1$ нулей. Если же мы предположим

$$\delta(x_1) = \delta(x_2) = \ldots = \delta(x_k) = 0, \quad \delta(x_{k+1}) \neq 0,$$

то видим, что функция $\delta(x)$ имеет при $x_1 \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ по крайней мере k нулей. Во всех случаях число нулей функции $\delta(x)$ на отрезке не менее числа интервалов (x_i, x_{i+1}), лежащих на этом отрезке; поэтому функция $\delta(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ по крайней мере $n+1$ нулей, что невозможно; следовательно, $L_1 > L$, и теорема доказана.

II. Рассмотрим следующий частный случай: требуется найти наилучшее приближение на отрезке $[0, 2\pi]$ непрерывной периодической функции $f(x)$ посредством гармоник первого порядка:

$$\varphi(x) = a\cos x + b\sin x. \tag{2}$$

По теореме 1, достаточным условием наилучшего приближения является наличие четырех точек наибольшего отклонения с чередующимися знаками разности $\Delta(x)$. Но в данном случае оба корня разности $\delta(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$ различаются на π. Используя это обстоятельство и применяя вышеупомянутые необходимые условия Чебышева, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Для того чтобы гармоника*

$$\varphi_0(x) = a_0\cos x + b_0\sin x \tag{3}$$

осуществляла на отрезке $[0, 2\pi]$ *наилучшее приближение заданной непрерывной периодической функции* $f(x)$, *необходимо, чтобы число* μ *точек наибольшего отклонения* $\{x_i\}_1^\mu$ *было не менее двух.*

1) *Если* $\mu = 2$, *то необходимо и достаточно, чтобы* $x_2 - x_1 = \pi$ *и чтобы разность в этих точках была одного знака; если функция* $f(x)$ *дифференцируема хоть в одной из точек* x_1, x_2, *то решение единственно.*

2) *Если* $\mu = 3$, *то достаточно, чтобы знаки разности* $\Delta(x)$ *в точках* $\{x_i\}_1^3$ *шли чередуясь и чтобы* $x_3 - x_1 \leqslant \pi$; *если* $x_3 - x_1 < \pi$, *то решение единственно.*

3) *Если* $\mu \geqslant 4$, *то достаточно, чтобы знаки разности* Δx *в точках* $\{x_i\}_1^\mu$ *шли чередуясь; решение всегда единственно.*

Необходимость 1) вытекает из теоремы Чебышева. Для доказательства достаточности заметим, что из равенств

$$f(x_1) - \varphi_0(x_1) = \pm L, \quad f(x_2) - \varphi_0(x_2) = f(x_2) + \varphi_0(x_1) = \pm L,$$
$$x_2 = x_1 + \pi; \tag{4}$$
$$|f(x) - \varphi_0(x)| \leqslant L, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \tag{5}$$

вытекают равенства

$$f(x_1) - \{\varphi_0(x_1) + \varphi(x_1)\} = \pm L - \varphi(x_1);$$
$$f(x_2) - \{\varphi_0(x_2) + \varphi(x_2)\} = \pm L + \varphi(x_1),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная гармоника первого порядка; следовательно, при $\varphi(x_1) \neq 0$ гармоника $\varphi_0(x) + \varphi(x)$ дает приближение хуже, а при $\varphi(x_1) = 0$ — не лучше, чем $\varphi_0(x)$.

Если точек наибольшего отклонения только две и, таким образом, имеем

$$|f(x) - \varphi_0(x)| < L, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad x \neq x_1, \quad x \neq x_2, \tag{6}$$

то можно подобрать достаточно малое по модулю λ для того, чтобы гармоника $\varphi_0(x)+\lambda\sin(x-x_1)$ тоже являлась решением. Если же на функцию $f(x)$ наложить дополнительное ограничение — дифференцируемость в точке $x=x_1$, — то такой подбор λ невозможен и решение единственно. Действительно, мы имеем в этом случае для $x=x_1$

$$d\{\Delta(x)-\lambda\sin(x-x_1)\}=-\lambda dx;$$

следовательно, в точке $x'=x_1+dx$ имеем

$$\Delta(x')-\lambda\sin(x'-x_1)=\Delta(x_1)-\lambda dx=\pm L-\lambda dx.$$

Выбираем знак dx так, чтобы знак $(-\lambda dx)$ был одинаков со знаком $\pm L$; тогда $|\pm L-\lambda dx|>L$ — поэтому решение $\varphi_0(x)$ единственно.

Для доказательства 2) достаточно воспроизвести доказательство теоремы 1. Если $L_1<L$, то разность $\delta(x)$ обращается в нуль в точках x_1', x_2', причем

$$x_1<x_1'<x_2<x_2'<x_3,\quad x_2'-x_1'=\pi, \tag{7}$$

что невозможно, если $x_3-x_1\leqslant\pi$. Если $L_1=L$, т. е. решение не единственно, то все же точки x_1' и x_2' не выходят за пределы отрезка $[x_1, x_3]$, что невозможно, если $x_3-x_1<\pi$. Если $x_3-x_1=\pi$, то мы снова имеем случай 1), и решение не единственно. Наличие промежуточной точки x_2 ничего не меняет, ибо мы всегда можем выбрать знак λ таким, чтобы гармоника $\varphi_0(x)+\lambda\sin(x-x_1)$ давала в точке x_2 отклонение, меньшее, чем L по модулю.

Утверждение 3) вытекает из теоремы 1.

Так как случай $\mu=2$ является простейшим, то естественно начинать с него исследование всех возможных случаев.

Будем считать функцию $f(x)$ дифференцируемой на всем отрезке $[0, 2\pi]$,

Полагая

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad f_1(x)=\frac{f(x)-f(x+\pi)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)+f(x+\pi)}{2}, \tag{8}$$

мы имеем в точках x_1 и $x_2=x_1+\pi$

$$\begin{gathered} f_1(x_1)+f_2(x_1)-\varphi_0(x_1)=\varepsilon L,\quad -f_1(x_1)+f_2(x_1)+\varphi_0(x_1)=\varepsilon L,\\ \varepsilon=\pm1,\\ f_1'(x_1)+f_2'(x_1)-\varphi_0'(x_1)=0,\quad -f_1'(x_1)+f_2'(x_1)+\varphi_0'(x_1)=0 \end{gathered} \tag{9}$$

откуда находим

$$f_2'(x)=0,\quad f_2(x_1)=\varepsilon L,\quad \varphi_0(x_1)=f_1(x_1),\quad \varphi_0'(x_1)=f_1'(x_1),$$

и окончательно

$$\varphi_0(x)=f_1(x_1)\cos(x-x_1)+f_1'(x_1)\sin(x-x_1). \tag{10}$$

Мы приходим к следующему достаточному условию:

Теорема 3. *Если дана периодическая дифференцируемая функция $f(x)$ и если на всем отрезке $[0, 2\pi]$ справедливо неравенство*

$$|f(x)-\varphi_0(x)|\leqslant|f_2(x_1)|,$$

$$\varphi_0(x)=f_1(x_1)\cos(x-x_1)+f_1'(x_1)\sin(x-x_1), \tag{11}$$

где

$$f_1(x)=\frac{f(x)-f(x+\pi)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)+f(x+\pi)}{2},\quad f_2'(x_1)=0, \tag{12}$$

то гармоника $\varphi_0(x)$ является единственной гармоникой первого порядка, осуществляющей наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

III. Рассмотренная нами задача о наилучшем приближении периодической функции посредством гармоник первого порядка имеет практическое применение в следующей задаче.

Дана вертикальная нагрузка P ведущего колеса паровоза как функция угла поворота кривошипа $P=f(\alpha)$; подобрать вес q и угол φ заклинения противовеса так, чтобы максимум вертикальной неуравновешенной силы был минимальным.

Центробежная сила инерции противовеса $F=\frac{q}{g}R\omega^2$ (R — радиус, ω — угловая скорость кривошипа) дает проекцию на вертикаль

$$F_y=\frac{q}{g}R\omega^2\sin(\alpha+\varphi)=\frac{q}{g}R\omega^2\cos\alpha\sin\varphi+\frac{q}{g}R\omega^2\sin\alpha\cos\varphi. \tag{13}$$

Так как, по условию, разность $f(\alpha)-F_y$ должна наименее уклоняться от нуля, то гармоника (13) должна осуществлять наилучшее приближение заданной функции $f(\alpha)$; найдя гармонику $\varphi_0(\alpha)=a_0\cos\alpha+b_0\sin\alpha$, осуществляющую это приближение, мы легко найдем q и φ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_0}{b_0},\qquad q=\frac{g}{R\omega^2}\sqrt{a_0^2+b_0^2}. \tag{14}$$

Если функция $f(\alpha)$ задана аналитически, например своим разложением Фурье, то теорема 3 может сразу дать решение. Для того случая, когда функция $f(\alpha)$ задана таблицей своих значений в ряде точек, нами разработан метод последовательных приближений для нахождения гармоники $\varphi_0(\alpha)$, осуществляющей наилучшее приближение.

Поступило
7 XII 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937, гл. I.
[2] П. Л. Чебышев, Сочинения, т. I, стр. 15.